現代の数学II 期末試験 (2/3 実施) 略解

1. $\frac{31}{7} = [4; 2, 3]$.

2. $\frac{1}{3}$.

3. (1) $\sqrt{130} = [11; \overline{2, 2, 22}]$.

(2) $(x, y) = (6499, 570)$, $(84474001, 7408860)$ など.

4. (1) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. 初項 a_1 については書いていなくても正解としました.

(2) $n = 1$ のときは $a_1 = \sqrt{2}$ だから $\sqrt{2} \leq a_1 \leq 2$ が成り立つ.

k を正整数とし, $n = k$ のとき示すべき不等式が成り立つ, つまり,

$$\sqrt{2} \leq a_k \leq 2$$

が成り立つとする. このとき, この帰納法の仮定の辺々に 2 を加えて,

$$2 + \sqrt{2} \leq 2 + a_k \leq 4.$$

ここで $2 + \sqrt{2} \geq 2$ であるから, $2 \leq 2 + a_k \leq 4$. ルートをとって $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + a_k} \leq 2$. (1) より $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$ なので $\sqrt{2} \leq a_{k+1} \leq 2$. 故に, $n = k$ のとき不等式が成り立つと仮定すると $n = k + 1$ のときも不等式が成り立つ.

以上より, すべての正整数 n に対し $\sqrt{2} \leq a_n \leq 2$ が成り立つ.

(3) (1) を用いて $a_{n+1}^2 - a_n^2$ を計算すると,

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 + a_n) - a_n^2 = -(a_n + 1)(a_n - 2).$$

(2) より $a_n + 1 \geq 0$, $a_n - 2 \leq 0$ が分かる. よって $a_{n+1}^2 - a_n^2 \geq 0$ が成り立つ. これは $(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) \geq 0$ と書き直すことができる. (2) より $a_{n+1} + a_n \geq 2\sqrt{2} > 0$ であるから, $a_{n+1} - a_n \geq 0$ が分かる. 故に $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立ち, $\{a_n\}$ は単調増加列である.

(4) (2) よりすべての正整数 n に対し $a_n \leq 2$ が成り立つから $\{a_n\}$ は上に有界である. ま

た, (3) で示したように $\{a_n\}$ は単調増加列である. 上に有界な単調増加列はある実数に収束するので, $\{a_n\}$ はある実数に収束する.

極限値を a とすると, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ で $n \to \infty$ として

$$a = \sqrt{2 + a}.$$

両辺を二乗して $a^2 = 2 + a$. これを解いて $a = -1, 2$. 今, (2) より $\sqrt{2} \leq a_n \leq 2$ だから $n \to \infty$ として $\sqrt{2} \leq a \leq 2$. $a = -1$ はこの不等式を満たさず, $a = 2$ はこの不等式を満たすので, 求める極限値は 2 である.

注意: (4) では「上に有界な単調増加列は収束する」という事実を利用して極限値がある (数列が収束する) ことを明記していない場合, 6 点減点しました. また, 「上に有界」は (2) から分かる (もっと言うと, すべての正整数 n に対し $a_n \leq 2$, から分かる) ことを明確にしていない場合, 3 点減点しました. どういった事実を用いているのか, 事実を用いるのに何を確認したのか, などは明確にするようにしましょう.