現代の数学 II(担当: 赤塚)　期末試験問題　2020 年 2 月 3 日 (月) 11:00–12:20

問題 **1**~**3** については問題の順番通りに解答すること．**4** については, 解きやすい小問から解答してよい．**4** の (2) 以降の問題については, **答えだけ合っていても全く加点されない**場合もあるので注意すること．解答はすべて解答用紙に記入すること．解答用紙のみ, 足りなくなった場合は追加で配布する．その際は監督者に申し出ること．

1. (10 点) 分数 $\dfrac{31}{7}$ を $[a_0; a_1, \ldots, a_m]$ (ただし m は正の整数, $a_0, \ldots, a_m$ は正の整数で $a_m \geq 2$) の形の連分数に直せ (答えのみでよい).

2. (5 点) 次の極限値を計算せよ (答えのみでよい).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{3n^3 + n^2 - 1}.$$

3. (10 点 × 2=20 点) 次の問いに答えよ (いずれも答えのみでよい).
(1) $\sqrt{130}$ を $[a_0; \overline{b_1, \ldots, b_m}]$ (ただし $a_0, b_1, \ldots, b_m$ は正の整数) の形の循環連分数で表せ.
(2) $x^2 - 130y^2 = 1$ の整数解 (x, y) で, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ 以外のものを一組求めよ.

4. (10 点 ×4=40 点) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}}_{2\text{ が } n \text{ 個}}$$

で定める．例えば,

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

である．次の問に答えよ．
(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が満たす漸化式, つまり a_n と a_{n+1} の間の関係式を答えよ (答えのみでよい).
(2) すべての正整数 n に対し,

$$\sqrt{2} \leq a_n \leq 2$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で証明せよ．
(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列であることを証明せよ．(ヒント: (2) の不等式などを用いて $a_{n+1}^2 - a_n^2 \geq 0$ を示せ.)
(4) $n \to \infty$ のとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを簡単に説明し, 極限値を求めよ.

以上