経済数学 定期試験 略解

1. (1) $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1,$ (2) $f'(x) = \dfrac{5(\log x)^4}{x}.$

2. $f_x(x,y) = 5x^4 - 12x^3y^2,$ $f_y(x,y) = -6x^4y + 3y^2,$
$f_{xx}(x,y) = 20x^3 - 36x^2y^2,$ $f_{xy}(x,y) = -24x^3y,$
$f_{yx}(x,y) = -24x^3y,$ $f_{yy}(x,y) = -6x^4 + 6y.$

注意: $f_x(x,y)$ や $f_y(x,y)$ などを書かずに $5x^4 - 12x^3y^2$, $-6x^4y + 3y^2$ などと書いているのは 15 点減点 (つまり, このような書き方をされた方の本問の得点は 5 点以下) としました. 何を計算しているのかを分かるように書いていただかないと, 理解しているかが判断できません. また, 誤った記号を用いているもの (例えば, $f'_x(x,y)$ や $f''_{xy}(x,y)$ など) については, 本問全体で 2 点の減点に留めています. 記号は正しく使いましょう.

3. (1) $\dfrac{1}{4},$ (2) $\dfrac{261}{256},$ (3) 1, (4) 0.

4. $z = 5(x-1) - 6(y+1) + 5$ または $z = 5x - 6y - 6.$

注意: $z =$ が抜けているのは 5 点の減点としました. $z = 5x - 6y - 6$ を満たす (x,y,z) を三次元空間にプロットしたものが問題文にある接平面です. 単に $5x - 6y - 6$ と書くと, これは関数であり, 三次元空間の図形を表すものではありません.

6. $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2$ を満たす全ての実数の組 (x,y) に対し, $f(x,y) \ge f(a,b)$

注意:「$a-r \le x \le a+r$ かつ $b-r \le y \le b+r$ を満たす実数 x, y に対し $f(x,y) \ge f(a,b)$」と書かれた方も正解です. 問題文の枠の部分だけ見ると主張は異なりますが, 問題の「$f(x,y)$ を二変数関数, (a,b) を実数の組とする」という部分から見ると, どちらを入れても同じ主張になります. 同じ理由で「$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le r$ を満たす全ての実数の組 (x,y) に対し $f(x,y) \ge f(a,b)$」と, 解答例の r^2 を r としていた方も正解です. 授業では (a,b) を中心とし半径 r の円板を $D_r(a,b)$ と表しましたので,「すべての $(x,y) \in D_r(a,b)$ に対し $f(x,y) \ge f(a,b)$」と書いても正解です.

一方,「$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2$ を満たす全ての実数の組 (x,y) に対し, $f(x,y) > f(a,b)$」と $\ge$ を $>$ にした人がいましたが, これは誤りです. $(x,y) = (a,b)$ は $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2$ を満たしますが, $f(x,y) = f(a,b)$ なので $f(x,y) > f(a,b)$ を満たさないからです. (つまり, 等号なしの不等号で極小を定義してしまうと, どんな二変数関数, どんな (a,b) を取ってきても極小になることはありません.) このように書いた方は 2 点減点しています.

6.(略解) 一階の条件 (一階偏微分 $= 0$ の連立方程式) を解いて, $(x,y) = (0,0), (1,1)$. 二階の条件を用いることで $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ では極大値を取り, $(x,y) = (1,1)$ で

は極値を取らないことが分かる. 結論は, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で極大値 0 を取り, 他の (x,y) では極値を取らない, となる.

7.(略解) ラグランジュ関数の一階偏微分 $=0$ を解くと, 四つの解

$$(x,y)=(0,0), \quad (-2,-2), \quad \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

を得る. また, もう一つ解くべき連立方程式は解を持たないことが分かる. 上の四つの解を, 最大値・最小値を求めたい関数 xy に代入し, 大小を比較することで,

- $(x,y)=(-2,-2)$ のとき最大値 4,
- $(x,y)=\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

を取ることが分かる.

これはあくまで略解である, ということに注意してください. **6** と **7** については, 上のような書き方をするとかなり減点されます. 具体的にどのような連立方程式ができるか, ラグランジュ関数の具体的な形はどのようになっているか, などは必ず答案に含める必要があります. また, **6** では, 極値を取ることや極大/極小と判定したことの根拠 (具体的には, ヘシアンや二階偏微分係数の符号) が明記されていないものは減点です.