2019 年度基礎数学 B 定期試験 略解

1. (1) 14,　　(2) 89.

2. (1) 存在しない,　　(2) $(x, y) = (15, 18)$ など.

3. 23.

4. (1) 9,　　(2) 6.

5. 13.
(考え方) $25 \equiv 25 - 26 = -1 \pmod{26}$ より,

$$1^{11} + 25^{11} \equiv 1^{11} + (-1)^{11} = 0 \pmod{26}$$

である. 同様にすると,

$$2^{11} + 24^{11} \equiv 0 \pmod{26},\quad 3^{11} + 23^{11} \equiv 0 \pmod{26}, \ldots, 12^{11} + 14^{11} \equiv 0 \pmod{26}$$

が成り立つ. 故に,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{25} j^{11} &= (1^{11} + 25^{11}) + (2^{11} + 24^{11}) + \cdots + (12^{11} + 14^{11}) + 13^{11} \\ &\equiv 13^{11} \pmod{26}.\end{aligned}$$

$13^2 = 169$ を 26 で割ると余りは 13 だから, $13^2 \equiv 13 \pmod{26}$ である. さらに,

$$13^3 = 13^2 \times 13 \equiv 13 \times 13 \equiv 13 \pmod{26}.$$

これを繰り返すと, $13^{11} \equiv 13 \pmod{26}$ を得る. よって,

$$\sum_{j=1}^{25} j^{11} \equiv 13 \pmod{26}$$

であり, 求める余りは 13 である.

6. n に関する数学的帰納法により証明する.
　$n = 1$ のとき, 両辺をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{j=1}^{1} j(j+1) = 1 \times (1+1) = 2, \\ (\text{右辺}) &= \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2\end{aligned}$$

となり, 等式は成立する.

k を正の整数とし, $n=k$ のとき等式が成り立つ, つまり,

$$\sum_{j=1}^{k} j(j+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つと仮定する. このとき, $n=k+1$ のときの左辺を

$$\sum_{j=1}^{k+1} j(j+1) = \underline{\sum_{j=1}^{k} j(j+1)} + (k+1)(k+2)$$

と書く. 下線を引いた項に帰納法の仮定 ($\clubsuit$) を適用して,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1} j(j+1) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) \\ &= (k+1)(k+2) \times \frac{k+3}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.\end{aligned}$$

以上より, $n=k$ のとき等式の成立を仮定すると, $n=k+1$ のときも等式が成り立つ.

以上より, すべての正の整数 n に対し示すべき等式が成り立つ.

7. (1) $b-a$ が m で割り切れるとき, $a \equiv b \pmod{m}$ と記す.

(2) 仮定 $a \equiv b \pmod{m}$ より, $b-a$ は m で割り切れる. 即ち,

$$b-a=mk \tag{$\heartsuit$}$$

となる整数 k が存在する. 仮定 $c \equiv d \pmod{m}$ より, $d-c$ は m で割り切れる. 即ち,

$$d-c=ml \tag{$\spadesuit$}$$

となる整数 l が存在する. ここで,

$$bd-ac = bd-bc+bc-ac = b(d-c)+(b-a)c$$

に注意し, ($\heartsuit$) および ($\spadesuit$) を用いると,

$$bd-ac = b \times (ml) + (mk) \times c = m(bl+ck).$$

ここで, b, c, k, l は整数であること, 整数は和と積について閉じていることから $bl+ck$ も整数である. よって $bd-ac$ が m で割り切れることが分かり, $ac \equiv bd \pmod{m}$ を得る.

注意: (1) について,「$a \div m$ の余りと $b \div m$ の余りが等しい」と書いてあっても正解としました. ただし, その場合, (2) については上に書いたような解答ではほとんど加点していません. 定義に基づき, ということですので, (1) に記した定義に戻って解答する必要があるからです.「余りが等しい」という定義に戻って適切に解答していれば (2) も正解ですが, 余りは割る数よりも小さいということに注意が払われていない場合, 減点の対象です.

なお, (1) で「$b-a$ が m で割り切れる」,「$a \div m$ の余りと $b \div m$ の余りが等しい」の両方が書いてあった場合, 多くの答案について (1) と (2) の両方を 0 点としています. 定義とは記号や言葉を約束するものであって, (証明を必要とする) 性質とは明確に区別しなくてはいけないものです. 定義を聞いている訳ですので, 一方を定義とすればもう一方は性質として証明することができる, という場合でも片方のみを定義としなくてはいけません. [なお, 上記の二つについて, 一方を定義とすればもう一方は性質として従う, ということは教科書 45 ページの定理 12.3 で証明しています. 興味がおありの方はそちらをご覧ください.]