2019 年度基礎数学 (夜間主コース) 定期試験 略解

1. (1) 14,　　(2) 29.

2. (1) $(x, y) = (4, 1)$ など,　　(2) $(x, y) = (75, 40), (32, 17)$ など.

3. 2.

4. (1) 25,　　(2) 20.

5. 368.
(考え方) ヒントに書いてある通り,

$$806201908062019 = 806 \times 10^{12} + 2019 \times 10^{8} + 806 \times 10^{4} + 2019$$

と書きます. $10^4 \equiv 10^4 - 1667 \times 6 = -2 \pmod{1667}$ であることに注意すると,

$$806201908062019 \equiv 806 \times (-2)^3 + 2019 \times (-2)^2 + 806 \times (-2) + 2019 \pmod{1667}$$

となります. 右辺を計算すると,

$$806 \times (-2)^3 + 2019 \times (-2)^2 + 806 \times (-2) + 2019 = 2035 \equiv 368 \pmod{1667}$$

となり, 余りは 368 と分かります.

6. n に関する数学的帰納法で証明する.

[1] $n = 1$ のとき, 等式の左辺, 右辺をそれぞれ計算すると,

$$(\text{左辺}) = \sum_{j=1}^{1} j^3 = 1^3 = 1, \qquad (\text{右辺}) = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

で等式が成立する.

[2] k を正整数とし, $n = k$ のとき等式は正しい, 即ち,

$$\sum_{j=1}^{k} j^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つと仮定する. $n = k + 1$ のときの左辺を考える. これを

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \sum_{j=1}^{k} j^3 + (k+1)^3$$

と書き, 帰納法の仮定 (♣) を上式右辺の第 1 項に適用して,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2\frac{k^2+4k+4}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

となる. 即ち, $n = k$ のとき等式が正しいと仮定すると, $n = k + 1$ のときも等式が成り立つ.

上記の [1], [2] により, すべての正整数 n に対し等式が成り立つ.

7. まず $X \subset \mathbb{Z}$ を示す. X の元は整数 x, y を用いて $5x + 7y$ と書ける. 5, 7, x, y は整数で, 整数は加法と乗法について閉じているから $5x + 7y \in \mathbb{Z}$ である. よって $X \subset \mathbb{Z}$ が成り立つ.

次に $\mathbb{Z} \subset X$ を示す. そのため, 整数 k を勝手に取る. このとき, $x = 3k$, $y = -2k$ と取ると x と y は整数で

$$5x + 7y = 5 \times (3k) + 7 \times (-2k) = k$$

である. よって $k = 5x + 7y \in X$ であり, $\mathbb{Z} \subset X$ が示された.

以上より $X \subset \mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z} \subset X$ が示されたので, $X = \mathbb{Z}$ が成り立つ.