2019 年度基礎数学 A 定期試験 略解

1. (1) 12,　　(2) 87.

2. (1) 存在しない,　　(2) $(x, y) = (-34, -16), (32, 15)$ など.

3. 14.

4. (1) 32,　　(2) 30.

5. 108.
(考え方) ヒントに書いてある通り,

$$63 \equiv 63 + 193 = 256 = 2^8 \pmod{193}$$

を用いると,

$$63^{100} \equiv (2^8)^{100} = 2^{800} \pmod{193}.$$

193 は素数なので, フェルマーの小定理より,

$$2^{192} \equiv 1 \pmod{193}.$$

$800 = 192 \times 4 + 32$ であるから,

$$2^{800} = \cdots = (2^{192})^4 \times 2^{32} \equiv 2^{32} \pmod{193}.$$

あとは上で計算した $2^8 \equiv 63 \pmod{193}$ を用いて計算すると,

$$2^{32} \equiv 63^4 \equiv \cdots \equiv 108 \pmod{193}.$$

6. 背理法で証明する. $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x が存在したと仮定し, 矛盾を見つけることで証明する. $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}$(m, n は整数で $n \neq 0$) と書く. 必要なら約分をした後で m と n を取り直すことで, $\underline{\gcd(m, n) = 1}$となるように m, n を取ることができるので, そのように取る. $x = \frac{m}{n}$ を $4x^3 = 1$ に代入して,

$$4\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 1, \quad 4m^3 = n^3. \tag{0.1}$$

左辺 $4m^3$ は偶数なので n^3 も偶数である. (奇数の三つの積は奇数であるから) そのためには n も偶数でなくてはいけない. よって $n = 2k$(k は整数) と書ける. $n = 2k$ を式 (0.1) に代入して,

$$4m^3 = (2k)^3, \quad m^3 = 2k^3.$$

右辺 $2k^3$ は偶数より m^3 も偶数である．そのためには m も偶数でなくてはいけない．よって $m = 2l$(l は整数) と書ける．

以上より, m と n は 2 を公約数に持つ．これは下線を引いた $\gcd(m, n) = 1$ に反する．よって $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x は存在しない．

7. (1) $B \subset A$ を示す．B の任意の元は整数 k を用いて $4k$ と書ける．ここで $x = k + 1$, $y = k - 1$ とおくと, 整数は加法, 減法について閉じているので x と y は整数で

$$x^2 - y^2 = (k+1)^2 - (k-1)^2 = (k^2 + 2k + 1) - (k^2 - 2k + 1) = 4k.$$

よって $4k = x^2 - y^2 \in A$ であり, $B \subset A$ が言えた．

(2) $A \cap C = \emptyset$ を背理法で示す．$A \cap C \neq \emptyset$ とし, $\alpha \in A \cap C$ とする．$\alpha \in A$ より, 整数 x, y を用いて $\alpha = x^2 - y^2$ と書ける．一方, $\alpha \in C$ より, 整数 k を用いて $\alpha = 4k + 2$ と書ける．よって, $x^2 - y^2 = 4k + 2$, 即ち,

$$(x+y)(x-y) = 2(2k+1) \tag{0.2}$$

が得られる．右辺が 2 で割れるため, $x + y$ または $x - y$ が 2 で割り切れる．

- $x + y$ が 2 で割れるとき, $x + y = 2l$(l は整数) と書けるが, $x - y = (x + y) - 2y = 2(l - y)$ より,
$$(x+y)(x-y) = 4l(l-y).$$
よって式 (0.2) の左辺を 4 で割ると余りは 0, 右辺を 4 で割ると余りは 2 で, 割り算における商と余りの一意性に反する．

- $x - y$ が 2 で割れるとき, $x - y = 2m$(m は整数) と書けるが, $x + y = (x - y) + 2y = 2(m + y)$ より,
$$(x+y)(x-y) = 4m(m+y).$$
よって式 (0.2) の左辺を 4 で割ると余りは 0, 右辺を 4 で割ると余りは 2 で, 割り算における商と余りの一意性に反する．

いずれにしても矛盾が生じた．よって, $A \cap C = \emptyset$ である．

注意: 2017 年度 (平成 29 年度) 基礎数学 A の期末試験の続編のような問題でした．整数 k に対し,

$$2k + 1 = (k+1)^2 - k^2 \in A$$

ですので,

$$\{2k + 1 | k \text{ は整数}\} \subset A$$

が分かります (記号が違いますが, これが 2017 年度の問題の一つでした)．このことと今回の問題から,

$$A = \{2k + 1 | k \text{ は整数}\} \cup \{4k | k \text{ は整数}\}$$

となることが分かります．