

基礎数学 A 定期試験 問題用紙

2019年8月6日(火) 3 講目 (12:50~14:00, 70分)

注意事項:

- 指定された座席に座ること。試験監督から認められた場合を除き、教室指定、座席指定を守らない学生の答えは採点の対象としない。採点の際に教室指定等が守られていないことが判明した場合も、同様の扱いとする。
- 問題用紙(本紙)1枚, 計算用紙1枚, 解答用紙1枚。
- 学生証, 仮学生証のいずれかを所有している学生のみ受験を認める。
- 筆記用具と計時機能のみの時計以外, 持ち込み不可である。携帯電話, スマートフォン等の時計使用は認めない。
- 筆記用具と時計以外の所持品は**かばんの中**にしまうこと。机の中や上着のポケットに入れることは禁止する。
- 机に文字等が書かれている場合, 全て消すこと。消すことができない場合, 監督者に申し出ること。試験前, 試験最中を問わず, 机への記入, 計算は不正行為とみなす。
- 問題の解答はすべて**解答用紙の所定の位置に記入すること**。解答は必ず枠内に収めること。枠外への記述は無視して採点する。また, **解答用紙の追加は認めないので**, 枠の大きさを考えて解答すること。
- 試験開始直後に学生番号, 氏名を解答用紙の所定の欄(2か所)に記入すること。裏面に解答しない場合でも, **必ず裏面にも番号と氏名を記入すること**。氏名(フルネーム)が全くないものは採点の対象外, 部分的な記入漏れは5点減点する。
- 極端に薄い字や小さい字, 読ませるつもりのない字など, 判読困難なものは採点の対象外とする。また, 消したかどうか分からない文字や二通り以上に読むことのできる文字は悪意を持って採点する(=意図的に配点の少ないほうに解釈する)。その他, 採点者に優しくないと思われる答案も減点する。
- **途中退室する場合, 教室の外に出るまでは私語を固く禁止する。**
- **解答用紙を必ず提出すること**。提出がない場合, その学生は呼び出しを受け, 最悪の場合, 不正行為と認定される。問題用紙, 計算用紙は持ち帰ること。
- この試験は110点満点である。原則として獲得点数をそのまま成績とするが, 秀評価については9割以上の点数(つまり99点以上)を獲得した方のみを対象とする可能性がある。

1.(10点×2=20点) 次の最大公約数を計算せよ (答えのみでよい).

(1) $\gcd(24, 60)$, (2) $\gcd(2697, 2001)$.

2.(10点×2=20点) 次の方程式を満たす整数の組 (x, y) を一組答えよ. 方程式を満たす整数の組 (x, y) が存在しない場合, 「存在しない」と書くこと (答えのみでよい).

(1) $12x - 8y = 6$, (2) $31x - 66y = 2$.

3.(10点) 5^{1200} を 47 で割ったときの余りを, $0, 1, \dots, 45, 46$ から選べ (答えのみでよい).

4.(10点×2=20点) 集合 A および B を, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b\}$ で定める. A から B への写像は全部で (1) 個, A から B への全射な写像は全部で (2) 個ある. (1) および (2) に適切な数字を入れよ (答えのみでよい).

5.(10点, やや難?) 63^{100} を 193 で割ったときの余りを $0, 1, \dots, 191, 192$ から選べ.

ヒント: 193 は素数である. 単純にフェルマーの小定理を用いても 63^{100} の 100 を小さい数にすることはできない. そこで, $63 \equiv 63 + 193 \pmod{193}$ および素因数分解を用いて考えると... (こちらが想定している方法だと, それなりに計算も必要である.)

6.(15点) $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x は存在しないことを証明せよ. 特定の数が無理数であることを用いる場合, その事実にも証明をつけること. 特定の数が無理数であることを証明なしに用いた場合, 原則として本問は 0 点とする.

7.(15点, かなり難?) 集合 A, B, C をそれぞれ以下で定める:

$$A = \{x^2 - y^2 \mid x, y \text{ は整数}\}, \quad B = \{4k \mid k \text{ は整数}\}, \\ C = \{4k + 2 \mid k \text{ は整数}\}.$$

例えば, $5 = 3^2 - 2^2$ だから $5 \in A$ である. このとき, 次の (1), (2) を示せ.

(1) $B \subset A$, (2) $A \cap C = \emptyset$.

ただし, \emptyset は空集合のことである.

答案用紙裏面の 7 の解答欄について: (1) と (2) で区切りを設けていません. (1) と (2) 合わせて 7 の解答欄に収まるように解答してください. どちらから解答しても構いませんが, どちらを解答しているのかは採点者に分かるようにしてください.

以上

解答用紙提出の前に

解答用紙の表裏に学生番号, 氏名の書き忘れがないことを確認してください. 問題用紙 (本紙) と計算用紙は持ち帰ってください. また, 学生証も忘れないようにしてください.