2018 年度基礎数学 A 定期試験 略解

1. (1) 6,　　(2) 53.

2. (1) 存在しない,　　(2) $(x, y) = (38, 12), (-22, -7), (98, 31)$ など.

3. 2.
注意: 「$0, 1, \ldots, 45, 46$ から選べ」と書いてありますので, 49 は 0 点です.

4. (1) 27,　　(2) 6.

5. 145.
(考え方) まず, $10^4 \equiv -2 \pmod{1667}$ に注意します.

$$2018073120180731 = 2018 \times 10^{12} + 731 \times 10^8 + 2018 \times 10^4 + 731$$

と書き, $10^{12} = (10^4)^3 \equiv (-2)^3 = -8 \pmod{1667}$, $10^8 = (10^4)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{1667}$ を用いて,

$$2018073120180731 \equiv 2018 \times (-8) + 731 \times 4 + 2018 \times (-2) + 731 \pmod{1667}.$$

右辺を 2018, 731 でくくることで計算すると,

$$= -16525 \equiv -16525 + 16670 = 145 \pmod{1667}.$$

6. n に関する数学的帰納法で証明する.

[1] $n = 1$ のとき, 等式の左辺, 右辺をそれぞれ計算すると,

$$(\text{左辺}) = \sum_{j=1}^{1} j^3 = 1^3 = 1, \qquad (\text{右辺}) = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

で等式が成立する.

[2] k を正整数とし, $n = k$ のとき等式は正しい, 即ち,

$$\sum_{j=1}^{k} j^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つと仮定する. $n = k + 1$ のときの左辺を考える. これを

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \sum_{j=1}^{k} j^3 + (k+1)^3$$

と書き, 帰納法の仮定 (♣) を上式右辺の第 1 項に適用して,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1} j^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2\frac{k^2+4k+4}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

となる. 即ち, $n = k$ のとき等式が正しいと仮定すると, $n = k+1$ のときも等式が成り立つ.

上記の [1], [2] により, すべての正整数 n に対し等式が成り立つ.

7. 背理法で証明する. 素数は有限個しかないと仮定し, 素数全体を $p_1, \ldots, p_n$ とする. ここで,

$$N = p_1 \times p_2 \cdots \times p_n + 1 \tag{♠}$$

を考える. N の素因子の一つを p とする.

- p は N の素因子なので, $(N \div p$ の余り$) = 0$.
- $p_1, \ldots, p_n$ が素数全体なので, 適当な $j (1 \leq j \leq n)$ に対し $p = p_j$ と書ける. 式 (♠) を $p (= p_j)$ で割って, $(N \div p$ の余り$) = 1$.

これらは「整数の割り算の商と余りは一通りに決まる」という事実に反する. ゆえに素数は無数にある.