2018 年度基礎数学 (夜間主コース) 定期試験 略解

1. (1) 7, (2) 71.

2. (1) 存在しない, (2) $(x, y) = (27, 12)$ など.

3. 2.

4. (1) 8, (2) 6.

5. 9.

6. n に関する数学的帰納法で証明する.

$n = 1$ のとき, (左辺)$= 1$, (右辺)$= 2^1 = 2$ であるから, $n = 1$ のときは不等式が成り立つ.

k を正整数とし, $n = k$ のときに示すべき不等式が成り立つ, つまり,

$$k < 2^k \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つと仮定する. このとき, $n = k + 1$ の場合の (左辺)$-$(右辺) を考えてみると,

$$2^{k+1} - (k + 1) = 2 \times 2^k - k - 1$$

である. 右辺の 2^k の部分に帰納法の仮定 ($\heartsuit$) を適用して,

$$2^{k+1} - (k + 1) > 2 \times k - k - 1 = k - 1 \geq 0$$

が成り立つ. よって $k + 1 < 2^{k+1}$ であり, $n = k$ のときの不等式の成立を仮定すると, $n = k + 1$ のときも不等式が成り立つことが分かった.

以上より, すべての正整数 n に対し $n < 2^n$ が成り立つ.

7. (1) $a = bq$ を満たすような整数 q が存在するとき, a は b で割り切れると言う.
(2) 仮定から a が b で割り切れるので,

$$a = bq'$$

を満たすような整数 q' が存在する. 同様に, 仮定から b が c で割り切れるので,

$$b = cq''$$

を満たすような整数 q'' が存在する. これらを用いると,

$$a = bq' = cq'q''$$

である. よって $q = q'q''$ で q を定めると, 整数の積は整数なので q は整数で, $a = cq$ が成り立つ. よって, a は c で割り切れる.