2018 年度基礎数学 B 定期試験 略解

1. (1) 8,　　(2) 53.

2. (1) $(x, y) = (2, 2)$ など,　　(2) $(x, y) = (22, 12)$ など.

3. 25.

4. (1) 64,　　(2) 24.

5. 36 個.

6. 背理法で証明する. $2x^3 = 1$ を満たす有理数 x が存在したと仮定し, 矛盾を見つけることで証明する. $2x^3 = 1$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}$(m, n は整数で $n \neq 0$) と書く. 必要なら約分をした後で m と n を取り直すことで, $\underline{\gcd(m, n) = 1}$ となるように m, n を取ることができるので, そのように取る. $x = \frac{m}{n}$ を $4x^3 = 1$ に代入して,

$$2\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 1, \quad 2m^3 = n^3. \tag{0.1}$$

左辺 $2m^3$ は偶数なので n^3 も偶数である. (奇数の三つの積は奇数であるから) そのためには n も偶数でなくてはいけない. よって $n = 2k$(k は整数) と書ける. $n = 2k$ を式 (0.1) に代入して,

$$2m^3 = (2k)^3, \quad m^3 = 4k^3.$$

右辺 $4k^3$ は偶数より m^3 も偶数である. そのためには m も偶数でなくてはいけない. よって $m = 2l$(l は整数) と書ける.

以上より, m と n は 2 を公約数に持つ. これは下線を引いた $\gcd(m, n) = 1$ に反する. よって $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x は存在しない.

7. まず, $X \subset \mathbb{Z}$ を証明する. X の元はすべて $3x + 5y$(ただし x と y は整数) の形をしている. 整数の積は整数なので, $3x$, $5y$ は共に整数である. 整数の和は整数なので, $3x + 5y$ は整数である. よって $3x + 5y \in \mathbb{Z}$ であり, $X \subset \mathbb{Z}$ が示された.

次に $\mathbb{Z} \subset X$ を示す. そのためには $\mathbb{Z}$ のすべての元が X に属することを示せばよい. $k \in \mathbb{Z}$ を勝手に取る. このとき, $x = 2k$, $y = -k$ で x と y を定めると整数の積は整数だから x と y は整数で,

$$3x + 5y = k$$

が成り立つ. よって $k \in X$ であり, $\mathbb{Z} \subset X$ が分かった.

以上より, $X \subset \mathbb{Z}$ かつ $\mathbb{Z} \subset X$ なので, $X = \mathbb{Z}$ である.