2017 年度 経済数学 定期試験 略解

1. (1) $f'(x) = 4x^3 - 6x$, (2) $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$.

2. $f_x(x, y) = -3x^2 + 4y^2$, $f_y(x, y) = 8xy - 2y$,
$f_{xx}(x, y) = -6x$, $f_{xy}(x, y) = 8y$, $f_{yx}(x, y) = 8y$, $f_{yy}(x, y) = 8x - 2$.

注意: 計算ミスが多く見受けられました. 簡単な関数 (多項式) の偏微分ですので, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ が成り立つはずです. $f_{xy}(x, y)$ と $f_{yx}(x, y)$ で異なる関数が出てきたら, 計算をもう一度やり直すぐらいはしましょう.

3. (1) $-\dfrac{1}{2}$, (2) $\dfrac{9}{4}$, (3) $\dfrac{2}{3}$, (4) $-\dfrac{25}{27}$.

4. $z = 3(x - 1) + 4(y + 1) - 1$ または $z = 3x + 4y$.

注意: $z =$ が書かれていないものは 2 点減点しました. 減点した理由を, まず, 変数を一つ落とした直線の方程式で説明します. 例えば, 直線の方程式 $y = x + 1$ を $x + 1$ とは書きません. 実際, $y = x + 1$ を満たす実数の組 (x, y) を xy 平面にすべてプロットすると直線になり, それを「直線の方程式 $y = x + 1$」というわけです. $x + 1$ とだけ言っても, それは関数であり, 直線を表すわけではありません.

同様に, 「平面の方程式 $z = 3x + 4y$」というのは, $z = 3x + 4y$ を満たす実数三つの組 (x, y, z) をすべて xyz 空間にプロットしたもの, さらにそれは平面になる, ということを意味します. $3x + 4y$ とだけ言うと, それは二変数関数であり, 平面を表すわけではありません.

5. $(x - a)^2 + (y - b)^2 \le r^2$ を満たすすべての実数の組 (x, y) に対し, $f(x, y) \le f(a, b)$.

注意: 次のような解答も正解としました.

1. すべての $(x, y) \in D_r(a, b)$ に対し, $f(x, y) \le f(a, b)$.
2. $a - r \le x \le a + r$ かつ $b - r \le y \le b + r$ を満たすすべての (x, y) に対し, $f(x, y) \le f(a, b)$.

授業では, $D_r(a, b)$ は中心 (a, b) で半径 r の円板を表す, ということにしました. その記号を用いて最初の解答を書き直したのが上の 1 になります. 2 の解答については, 円板の代わりに正方形を利用しています. 問題文 **5** にある文章全体としては, 円板を使ったものと正方形を使ったものは, 同等の主張であることが容易に証明できます. そのため正方形を用いたものも正解としました. また, 一番最初に書いた解答で $\le r^2$ を $< r^2$ にしたり, 2 の解答で「$a - r \le x \le a + r$ かつ $b - r \le y \le b + r$」を「$a - r < x < a + r$ かつ $b - r < y < b + r$」にしたものも正解です.

一方, 問題文の冒頭にある通り, 「極大値の定義に関する記述」ということを踏まえて解答する必要があります. また, 口頭でも「極値の候補の求め方や, 極大・極小の判定法を聞いているのではない」と申し上げました. よって, 「ヘシアンや一階/二階偏微分が...」と書いてある答案には, 基本的に点数を与えていません.

6. 一階の条件 (一階偏微分 $= 0$ の連立方程式) を解いて, $(x,y) = (0,1), (-1,2)$. 二階の条件を用いることで $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,1)$ では極値を取らないこと, $(x,y) = (-1,2)$ では極大値を取ることが分かる. 結論は, $f(x,y)$ は $(x,y) = (-1,2)$ で極大値 4 を取り, 他の (x,y) では極値を取らない, となる.

注意: これは略解で,

- 極値を取る (x,y) の候補を見つけるために解くべき連立方程式,
- 極値判定の根拠となるヘシアンや二階偏微分の値 (とその符号)

などは答案に含めなくてはいけません. 上のような解答を書いた場合, 10 点以上減点されます.

7. ラグランジュ関数の一階偏微分 $= 0$ を解くと, 四つの解

$$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

を得る. また, もう一つ解くべき連立方程式は解を持たないことが分かる. 上の四つの解を最大値・最小値を求めたい関数 xy に代入し, 大小を比較することで,

- $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ のとき最大値 $\frac{1}{5}$,
- $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ のとき最小値 $-\frac{1}{3}$

を取ることが分かる.

注意: 問題 **6** の略解と同様, 上のような書き方をすると大幅な減点です. ラグランジュ関数の具体的な形, 解くべき連立方程式などは答案に含めなくてはいけません.

記述問題 (6, 7) について (7/31 追記)

まだ採点中ですが, 採点していて気になったことについて書いておきます:

- 途中過程を省略しすぎている答案が多く見受けられました. 解くべき連立方程式やヘシアンの具体的な形を明記していないものは 10 点前後の減点です. **6** で「二階の条件より」とだけ書いて, 極値判定の根拠を全く明記していないものなどがこれに該当します.

- 連立方程式の解き方を説明していないもの (ある式を何倍して他の式から引く, などの説明がないもの. もちろん, 「ある式」, 「他の式」というのは具体的にどの式か, 分かるように書く必要があります.) も 5 点前後減点しています. 連立方程式については 0 になりうるもので割り算をしていないか, などは採点時に注意して見ています. 途中過程を明記していないものについては, 注意すべきポイントを正しく考えていない, と判断します.

- 微分記号が正しく用いられていないものについては, 問題 **2** で減点されている場合, **6**, **7** では大目に見ています.