2017 年度基礎数学 A 定期試験 略解

1. (1) 9,　　(2) 31,

2. (1) $(x, y) = (2, 0)$ など,　　(2) $(x, y) = (10, 8)$ など.

3. 16.

4. (1) 32,　　(2) 30.

5. 84.
(考え方) mod100 で考えると,

$$\begin{aligned}
&4^1 = 4, \quad 4^2 = 16, \quad 4^3 = 64, \quad 4^4 = 256 \equiv 56, \quad 4^5 \equiv 24, \\
&4^6 \equiv 96, \quad 4^7 \equiv 84, \quad 4^8 \equiv 36, \quad 4^9 \equiv 44, \quad 4^{10} \equiv 76, \\
&4^{11} \equiv 4
\end{aligned}$$

となる. ここで, 4^5 を計算するときは

$$4^5 = 4^4 \times 4 \equiv 56 \times 4 = 224 \equiv 24 \pmod{100}$$

のように計算をした. このように, $4^{\square}$ は 10 周期になっている. つまり,

$$4^{2017} \equiv 4^7 \equiv 84 \pmod{100}$$

であり, 4^{2017} の下 2 桁は 84 である.

6. 背理法で証明する. $2x^3 = 1$ を満たす有理数 x が存在したと仮定し, 矛盾を見つけることで証明する. $2x^3 = 1$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}$(m, n は整数で $n \neq 0$) と書く. 必要なら約分をした後で m と n を取り直すことで, $\underline{\gcd(m, n) = 1}$となるように m, n を取ることができるので, そのように取る. $x = \frac{m}{n}$ を $2x^3 = 1$ に代入して,

$$2\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 1, \quad 2m^3 = n^3. \tag{0.1}$$

左辺 $2m^3$ は偶数なので n^3 も偶数である. (奇数の三つの積は奇数であるから) そのためには n も偶数でなくてはいけない. よって $n = 2k$(k は整数) と書ける. $n = 2k$ を式 (0.1) に代入して,

$$2m^3 = (2k)^3, \quad m^3 = 4k^3.$$

右辺 $4k^3$ は偶数より m^3 も偶数である. そのためには m も偶数でなくてはいけない. よって $m = 2l$(l は整数) と書ける.

以上より, m と n は 2 を公約数に持つ. これは下線を引いた $\gcd(m,n)=1$ に反する. よって $2x^3=1$ を満たす有理数 x は存在しない.

7. (1) $Y \subset X$ を示すためには, 勝手な整数 k に対し $2k+1 \in X$ であることを示せばよい. 今, $x=k+1$, $y=k$ とおくと, x と y は整数で

$$x^2-y^2=(k+1)^2-k^2=2k+1.$$

よって $2k+1 \in X$ である. 故に $Y \subset X$ が分かった.

(2) $2 \notin X$ を示すには,

$$x^2-y^2=2 \text{ を満たす整数 } x,\, y \text{ が存在しない}$$

ことを示せばよい. 以下, x と y は整数とする. まず,

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

に注意する. 今, $1 \equiv -1 \pmod 2$ であるから,

$$x+y \equiv x-y \pmod 2$$

となる. つまり, $x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致する. よって, [1] $x+y$ と $x-y$ がともに偶数の場合, [2] $x+y$ と $x-y$ がともに奇数の場合, のどちらかとなる. 各々の場合について考察を行う.

[1] の場合, つまり $x+y=2k$, $x-y=2l$(k, l は整数) の場合

このとき,

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=4kl$$

であるから, x^2-y^2 は 4 で割り切れる. つまり, この場合は $x^2-y^2=2$ となることはない.

[2] の場合, つまり $x+y=2k+1$, $x-y=2l+1$(k, l は整数) の場合

このとき,

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(2k+1)(2l+1)=2(2kl+k+l)+1$$

であるから, x^2-y^2 は奇数である. つまり, この場合も $x^2-y^2=2$ となることはない.

以上より, $x^2-y^2=2$ となる整数 x, y は存在しないことが分かった.