2017 年度基礎数学 B 定期試験 略解

1. (1) 12, (2) 29,

2. (1) 存在しない, (2) $(x, y) = (9, 6)$ など.

3. 4.

4. (1) 25, (2) 20.

5. 14.
(考え方) 19 は素数, $19 \nmid 13$ だから, フェルマーの小定理より,

$$13^{18} \equiv 1 \pmod{19}. \tag{1}$$

次に $11^{11} \div 18$ の余りを求める. $11^2 = 121 \equiv 13 \pmod{18}$ より,

$$11^{11} = 11^{2\times5+1} = (11^2)^5 \times 11 \equiv 13^5 \times 11 \pmod{18}.$$

$13^2 = 169 \equiv 7 \pmod{18}$ より,

$$13^5 \times 11 = \{(13^2)^2 \times 13\} \times 11 \equiv 7^2 \times 13 \times 11 \pmod{18}.$$

$7^2 = 49 \equiv 13 \pmod{18}$ および $11 \times 13 = 143 \equiv 17 \pmod{18}$ だから,

$$7^2 \times 13 \times 11 \equiv 13 \times 17 = 221 \equiv 5 \pmod{18}.$$

以上より, $11^{11} \equiv 5 \pmod{18}$ が成り立つ. つまり, 正整数 k を用いて $11^{11} = 18k + 5$ と書ける.

よって,

$$13^{11^{11}} = 13^{18k+5} = (13^{18})^k \times 13^5.$$

合同式 (1) を用いて,

$$13^{11^{11}} \equiv 1^k \times 13^5 = 13^5 \pmod{19}.$$

$11^{11} \div 18$ の余りを求めた時と同じ要領で $13^5 \div 19$ の余りを計算して, $13^5 \equiv 14 \pmod{19}$ が分かる. ゆえに $13^{11^{11}} \equiv 14 \pmod{19}$, 即ち求める余りは 14 である.

6. 背理法で証明する. $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x が存在したと仮定し, 矛盾を見つけることで証明する. $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}$(m, n は整数で $n \neq 0$) と書く. 必要なら約分をした後で m と n を取り直すことで, $\underline{\gcd(m, n) = 1}$となるように m, n を取ることができるので, そのように取る. $x = \frac{m}{n}$ を $4x^3 = 1$ に代入して,

$$4\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 1, \quad 4m^3 = n^3. \tag{2}$$

左辺 $4m^3$ は偶数なので n^3 も偶数である. (奇数の三つの積は奇数であるから) そのためには n も偶数でなくてはいけない. よって $n = 2k$(k は整数) と書ける. $n = 2k$ を式 (2) に代入して,

$$4m^3 = (2k)^3, \quad m^3 = 2k^3.$$

右辺 $2k^3$ は偶数より m^3 も偶数である. そのためには m も偶数でなくてはいけない. よって $m = 2l$(l は整数) と書ける.

以上より, m と n は 2 を公約数に持つ. これは下線を引いた $\gcd(m, n) = 1$ に反する. よって $4x^3 = 1$ を満たす有理数 x は存在しない.

7. まず, $X \subset Y$ を証明する. そのためには X のすべての元が Y に属することを示せばよい. これを言うには

$$a \text{ と } b \text{ が整数のとき } 12a + 21b \in Y \tag{$\heartsuit$}$$

が成り立つことを示せばよい. そこで a と b を整数とする.

$$12a + 21b = 3(4a + 7b)$$

より, $k = 4a + 7b$ で k を定める. 整数の積, 和は整数なので, k も整数である. さらに $12a + 21b = 3k$ が成り立つ. よって $12a + 21b \in Y$ となり, ($\heartsuit$) が言えた. つまり $X \subset Y$ が言えた.

次に $Y \subset X$ を示す. そのためには Y のすべての元が X に属することを示せばよい. これを言うには

$$k \text{ が整数のとき } 3k \in X \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つことを示せばよい. そこで k を整数とする.

$$12 \times 2 + 21 \times (-1) = 3$$

に注意する. 辺々を k 倍して,

$$12 \times (2k) + 21 \times (-k) = 3k.$$

よって, $a = 2k$, $b = -k$ とおくと, 整数の積は整数だから a と b は整数である. また, $3k = 12a + 21b$ が成り立つ. よって, $3k \in X$ が言え, ($\clubsuit$) が成り立つ. つまり, $Y \subset X$ が言えた.

以上より, $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ なので, $X = Y$ が分かった.