2017 年度基礎数学 (夜間主コース) 定期試験 略解

1. (1) 7,　　(2) 17,

2. (1) $(x, y) = (1, -1)$ など,　　(2) $(x, y) = (10, 8)$ など.

3. 16.

4. (1) 9,　　(2) 6.

5. 4448.
(考え方) 与えられた数は

$$2018020620180206 = 2018 \times 10^{12} + 206 \times 10^{8} + 2018 \times 10^{4} + 206 \tag{1}$$

と書ける. $10^4 \equiv 1 \pmod{9999}$ であるから, $10^{12} = 10^{4\times 3} = (10^4)^3 \equiv 1 \pmod{9999}$ が成り立つ. 同様に $10^8 \equiv 1 \pmod{9999}$ である. これらを式 (1) に適用して,

$$2018020620180206 \equiv 2018 \times 1 + 206 \times 1 + 2018 \times 1 + 206 = 4448 \pmod{9999}$$

であり, 求める余りは 4448 である.

6. 等式を n に関する数学的帰納法により証明する.

[1] $n = 1$ のとき,

$$(\text{左辺}) = \sum_{j=1}^{1} j^2 = 1^2 = 1, \qquad (\text{右辺}) = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

で, 等式は成立する.

[2] k を正整数年, $n = k$ のとき等式は成り立つ, つまり,

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \tag{$\spadesuit$}$$

が成り立つと仮定する. $n = k + 1$ のときの左辺を考える. これを

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2$$

と変形する. 右辺第 1 項に数学的帰納法の仮定 ($\spadesuit$) を用いて,

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (k+1)\left\{\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right\} \\
&= (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} = (k+1)\frac{(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}.
\end{aligned}
$$

よって, $n=k$ のとき等式が成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のときも等式が成り立つ.

[1], [2] より, すべての正整数 n に対し, 等式が成立する.

7. (1) $a \equiv b \pmod{m}$ とは, $b-a$ が m で割り切れることを意味する. (「$b-a=mk$ を満たす整数 k が存在する」などでも正解です.)

(2) 仮定 $a \equiv k \pmod{m}$ より, $b-a$ は m で割り切れる, つまり,

$$b-a=mk \tag{2}$$

を満たす整数 k が存在する. 同様に, 仮定 $c \equiv d \pmod{m}$ より,

$$d-c=ml \tag{3}$$

を満たす整数 l が存在する. ここで,

$$bd-ac = bd-bc+bc-ac = b(d-c)+(b-a)c$$

に注意し, 式 (2) および式 (3) を適用して,

$$bd-ac = b\times(ml)+(mk)\times c = m(bl+ck).$$

ここで $K=bl+ck$ とおくと, b, c, k, l は整数より, それらの積および和で作られる K も整数で, $bd-ac=mK$. よって, $bd-ac$ は m で割り切れる. つまり, $ac \equiv bd \pmod{m}$ が成り立つ.