2016 年度現代の数学 IV 定期試験 略解

1. 写像 f は (1) に該当する.
(理由) まず, f が単射であることを見る. そのため, $q_1 \in \mathbb{Q}$ および $q_2 \in \mathbb{Q}$ は $f(q_1) = f(q_2)$ を満たすものとする. このとき, $2q_1 = 2q_2$ であるから, 辺々を 2 で割って $q_1 = q_2$ が成り立つ. よって, f は単射である.

　次に, f が全射であることを見るため, $q' \in \mathbb{Q}$ とする. このとき, $q = q'/2$ とおくと $q \in \mathbb{Q}$ であり,

$$f(q) = 2q = 2 \times \frac{q'}{2} = q'$$

が成り立つ. よって, f は全射である.

2. 1 に σ を繰り返して,

$$1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 1$$

を得, これに対応する巡回置換は $(1\ 3\ 5\ 2)$ である. 上に出てこなかった数である 4 に注目し, σ を繰り返すと,

$$4 \mapsto 8 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 4$$

となり, これに対応する巡回置換は $(4\ 8\ 6\ 7)$ である.

　以上で $1 \sim 8$ のすべてが現れたので, σ は

$$\sigma = (1\ 3\ 5\ 2) \circ (4\ 8\ 6\ 7) \tag{$\clubsuit$}$$

と巡回置換の合成で表すことができる. 二つの巡回置換は

$$\begin{aligned}(1\ 3\ 5\ 2) &= (1\ 3) \circ (3\ 5) \circ (5\ 2),\\ (4\ 8\ 6\ 7) &= (4\ 8) \circ (8\ 6) \circ (6\ 7)\end{aligned}$$

と表せるので, これらを ($\clubsuit$) に代入して, σ の互換の合成による表示

$$\sigma = (1\ 3) \circ (3\ 5) \circ (5\ 2) \circ (4\ 8) \circ (8\ 6) \circ (6\ 7) \tag{$\heartsuit$}$$

を得る. 6 個の互換の合成で表せたので, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$ である.

注意. $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は一通りに決まりますが, 互換の合成で表す方法は一通りではありません. つまり, ($\heartsuit$) 以外にも互換の合成で表す方法がある, ということです. 当然, 別の表示でも「互換の合成で正しく表す」ことができていれば正解です.

3. (1) 次の三条件 (G1)∼(G3) を満たすとき, $(G, \cdot)$ は群であると言う:

(G1) G の元 a, b, c に対し, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ が成り立つ.

(G2) G の特別な元 e が存在して, すべての $a \in G$ に対し,

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

が成り立つ (このような e のことを G の単位元と言う).

(G3) すべての $a \in G$ に対し, 次を満たす $a^{-1} \in G$ が存在する:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

ここで, e は (G2) で述べた単位元のことである. (a^{-1} を a の逆元と言う.)

(2) $(\mathbb{R}, \times)$ は群ではない.
(理由) $(\mathbb{R}, \times)$ は単位元を 1 として (G2) を満たす. しかし, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$0 \times x = x \times 0 = 0 \neq 1$$

であるから, 0 に対する逆元が存在せず, (G3) を満たさない.

(3) $(\mathbb{R}_+, \times)$ は群である.
(理由) まず, $a, b \in \mathbb{R}_+$ とすると, a, b は実数であるから $a \times b$ も実数である. また, $a > 0$, $b > 0$ より $a \times b > 0$ であり, $a \times b \in \mathbb{R}_+$ が成り立つ. また, 実数のかけ算について結合律が成立するため, a, b, $c \in \mathbb{R}_+$ に対し,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

を満たし, (G1) が成り立つ.

$1 \in \mathbb{R}_+$ であり, すべての $a \in \mathbb{R}_+$ に対し,

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

が成り立つため, $e = 1$ として (G2) が成り立つ.

(G3) が成り立つことを見るため, $a \in \mathbb{R}_+$ とする. このとき, a は正の実数だから $\frac{1}{a}$ も正の実数, つまり, $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}_+$ である. さらに,

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

であるので, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ として (G3) が成り立つ.

以上より, $(\mathbb{R}_+, \times)$ は (G1)〜(G3) を満たし, 群である.

4. (1) (H2) より,

$$f(g \cdot g^{-1}) = f(g) * f(g^{-1})$$

が成り立つ. 左辺を計算すると,

$$f(g \cdot g^{-1}) = f(e) = e'$$

となる．ここで, 最後の等式で (H1) を用いた．以上より,

$$f(g) * f(g^{-1}) = e'.$$

同様に, (H2) より $f(g^{-1} \cdot g) = f(g^{-1}) * f(g)$ であり, 左辺は $f(g^{-1} \cdot g) = f(e) = e'$ と計算されるので,

$$f(g^{-1}) * f(g) = e'.$$

上の二式より, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ が成り立つ.

(2) K が部分群であることを見るには, 次の 3 つを確認すればよい.

- $k_1, k_2 \in K$ ならば $k_1 \cdot k_2 \in K$.
- $e \in K$.
- $k \in K$ ならば $k^{-1} \in K$.

まず一つ目の条件を確認する．$k_1, k_2 \in K$ とすると, $f(k_1) = f(k_2) = e'$ である．よって, (H2) と合わせると,

$$f(k_1 \cdot k_2) = f(k_1) * f(k_2) = e' * e' = e'.$$

最後の等式では, 単位元の定義「すべての $a' \in G'$ に対して $a' * e' = e' * a' = e'$」を $a' = e'$ として用いた．故に, K の定義から, $k_1 \cdot k_2 \in K$ が成り立ち, 一つ目の条件が確認できた．二つ目の条件は, (H1) より直ちに従う．最後の条件を確認する．そのため, $k \in K$ とする．このとき, (1) より,

$$f(k^{-1}) = f(k)^{-1} = (e')^{-1} = e'.$$

ここで, 最後の等式では, 先ほどの $e' * e' = e'$ を再度利用した．よって, $k^{-1} \in K$ が成り立ち, 最後の条件も確認できた．以上より, K は G の部分群である.

(3) まず, $g^{-1} \cdot K \cdot g \subset K$ が成り立つことを確認する．そのためには,

$$k \in K \Longrightarrow g^{-1} \cdot k \cdot g \in K$$

が成り立つことを確認すればよい．$k \in K$ とする．(H2) を繰り返し用いることで,

$$f(g^{-1} \cdot k \cdot g) = f(g^{-1} \cdot k) * f(g) = f(g^{-1}) * f(k) * f(g).$$

$k \in K$ より, $f(k) = e'$ である．また, (1) を用いて,

$$f(g^{-1} \cdot k \cdot g) = f(g)^{-1} * e' * f(g) = f(g)^{-1} * f(g) = e'.$$

よって, $g^{-1} \cdot k \cdot g \in K$ が成り立ち, $g^{-1} \cdot K \cdot g \subset K$ が分かった.

次に, $K \subset g^{-1} \cdot K \cdot g$ が成り立つことを見る. そのために, $k \in K$ とし, $k \in g^{-1} \cdot K \cdot g$ を示す. このとき, $k' = g \cdot k \cdot g^{-1}$ とおくと, (H2) および (1) より,

$$f(k') = f(g \cdot k \cdot g^{-1}) = f(g) * f(k) * f(g)^{-1}.$$

$k \in K$ を用いると,

$$f(k') = f(g) * e' * f(g)^{-1} = f(g) * f(g)^{-1} = e'.$$

よって, $k' \in K$ が成り立つ. また, $k' = g \cdot k \cdot g^{-1}$ の左から g^{-1}, 右から g をかけて,

$$g^{-1} \cdot k' \cdot g = k.$$

以上を総合すると, $k \in g^{-1} \cdot K \cdot g$ が成り立つ. よって, $K \subset g^{-1} \cdot K \cdot g$ を得る.

以上より, $K = g^{-1} \cdot K \cdot g$ が成り立つ.

注意. (H1), (H2) を満たす写像 f のことを G から G' への準同型写像 (homomorphism) と言います. 群論において準同型写像は極めて重要な概念です. (2) の K のことを f の核 (kernel) と言います. また, (3) で述べたような性質を満たす G の部分群のことを正規部分群と言います. 授業で剰余類の概念を学習しましたが, 群 G の正規部分群 N による剰余類には G から来る自然な演算を定めることができ, 剰余類に群構造を定めることができます. (単なる部分群 H の場合, 一般には G/H に自然な演算を入れることはできません.) この辺りのことに興味のある方は [芳沢] をご覧ください.