現代の数学 IV(担当: 赤塚)　期末試験問題　2017 年 2 月 8 日 13:00–14:20

以下, $\mathbb{Q}$ を有理数全体の集合, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合, S_n を n 次置換全体の集合とする. 計算過程や説明を答案に含めること. **答えだけ合っていても全く加点されない**場合もあるので注意すること. 解答はすべて解答用紙に記入すること. 解答用紙のみ, 足りなくなった場合は追加で配布する. その際は監督者に申し出ること.

1. (15 点) 写像 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ を $f(q) = 2q$ で定める. このとき, 写像 f は次のどれに該当するか. 理由も含めて解答せよ.

(1) 全単射である,　(2) 全射であるが単射でない,
(3) 単射であるが全射でない,　(4) 全射でも単射でもない.

2. (15 点) $\sigma \in S_8$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, σ を互換の合成で表せ. また, σ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を求めよ.

3. (20 点) (1) G を集合, $\cdot$ を G 上の演算とする. このとき, $(G, \cdot)$ が群であることの定義を述べよ.
(2) $(\mathbb{R}, \times)$ は群となるか. ただし, $\times$ は $\mathbb{R}$ の通常の乗法とする. (1) で述べた群の定義に基づいて解答すること.
(3) $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} |\ a > 0\}$ とする. このとき, $(\mathbb{R}_+, \times)$ は群となるか. ただし, $\times$ は $\mathbb{R}$ の通常の乗法とする. (1) で述べた群の定義に基づいて解答すること.

4. (30 点) $(G, \cdot)$ および $(G', *)$ を群とする. $f : G \to G'$ を写像とし, 次の二条件を満たすものとする.

(H1) $f(e) = e'$. ここで, e は G の単位元, e' は G' の単位元である.

(H2) すべての $g_1, g_2 \in G$ に対し, $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2)$.

このとき, 次の (1)∼(3) を示せ. 条件 (H1), (H2) および群の定義がどのように使われているかが分かるように解答すること.

(1) すべての $g \in G$ に対し, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ が成り立つ.

(2) $K = \{k \in G | f(k) = e'\}$ とおくと, K は G の部分群となる.

(3) K を (2) のように定める. $g \in G$ を勝手に一つ取り,

$$g^{-1} \cdot K \cdot g = \{g^{-1} \cdot k \cdot g | k \in K\}$$

とおく. このとき, $g^{-1} \cdot K \cdot g = K$ が成り立つ.