2016年度基礎数学 (夜間主) 定期試験 略解

1. (1) 6,　　(2) 17,

2. (1) 存在しない,　　(2) $(x, y) = (17, 8)$ など.

3. 3.

4. (1) 32,　　(2) 30.

5. 107 など.
(考え方) 条件を満たす整数 N とする. このとき, 与えられた二つの条件から, 次を満たす整数 k, l が存在する:

$$N = 13k + 3, \qquad N = 17l + 5.$$

よって,

$$13k + 3 = 17l + 5, \quad \text{つまり}, \quad 13k - 17l = 2. \tag{$\spadesuit$}$$

これをユークリッドの互除法などを用いて整数解 (k, l) を探すと, 例えば $(k, l) = (8, 6)$ は ($\spadesuit$) を満たす. $N = 13k + 3$ に $k = 8$ を代入して結論を得る.

6. 背理法で証明する. 即ち, $x^3 = 2$ を満たす有理数 x が存在したと仮定し, 論理的矛盾を見つけることにより証明を行う.

　$x^3 = 2$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}$(m, n は整数, $n \neq 0$) と書く. 必要があれば $\frac{m}{n}$ を約分した後, m, n を取り直すことで, $\underline{\gcd(m, n) = 1}$ となるように m, n を選ぶことができるので, そのように m, n を選ぶことにする. $x^3 = 2$ に $x = \frac{m}{n}$ を代入して,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 2, \quad \frac{m^3}{n^3} = 2, \quad m^3 = 2n^3. \tag{$\diamondsuit$}$$

右辺は偶数だから, m^3 も偶数でなくてはいけない. そのためには, m も偶数でなくてはいけない. つまり, $m = 2k$(k は整数) と書ける. これを ($\diamondsuit$) に代入して,

$$(2k)^3 = 2n^3, \quad 8k^3 = 2n^3, \quad 4k^3 = n^3.$$

左辺は偶数であるから, n^3 も偶数である. そのためには, n が偶数でなくてはいけない. つまり, $n = 2l$(l は整数) と書ける. 以上より, m, n は 2 を公約数に持つ. これは, 上で下線を引いた $\gcd(m, n) = 1$ に反する.

　よって, $x^3 = 2$ を満たす有理数 x は存在しない.

7. まず, $C \subset A \cap B$ を証明する. そのためには, $c \in C$ ならば $c \in A$ かつ $c \in B$ を示せ

ばよい．$c \in C$ と仮定する．このとき, 集合 C の定義から $c = 12k$(k は整数) と書くことができる．$c = 4 \times (3k)$ で, 3 および k は整数だから $3k$ も整数である．よって, c は 4 で割り切れ, $c \in A$ が成り立つ．同様に, $c = 6 \times (2k)$ で $2k$ は整数であるから, c は 6 で割り切れ $c \in B$ が成り立つ．以上より $c \in A$ かつ $c \in B$ であり, $c \in A \cap B$ が成り立つ．よって, $C \subset A \cap B$ が証明された．

次に, $A \cap B \subset C$ を証明する．そのため, $a \in A \cap B$ と仮定する．$a \in A$ より, $a = 4k$(k は整数) と表すことができる．同様に, $a \in B$ より, $a = 6l$(l は整数) と表すことができる．よって, $4k = 6l$, 即ち,

$$2k = 3l$$

が成り立つ．左辺は偶数だから $3l$ も偶数である．そのためには, l も偶数でなくてはいけない．よって, $l = 2m$(m は整数) と表すことができる．これを $a = 6l$ に代入して, $a = 6 \times (2m) = 12m$ となる．m は整数であるから, a は 12 で割り切れる, つまり $a \in C$ が成り立つ．よって, $A \cap B \subset C$ が証明された．

以上の議論より, $A \cap B = C$ が成り立つ．