2016 年度基礎数学 B 定期試験 略解

1. (1) 7, (2) 23,

2. (1) $(x,y)=(1,-1)$ など, (2) $(x,y)=(65,30)$ など.

3. 33.

4. (1) 36, (2) 30.

5. 2.
(考え方) $10\equiv -1 \pmod{11}$ であるから,

$$10^n \equiv (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ が偶数のとき} \\ -1 & n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \pmod{11}.$$

よって, 左辺第 1 項は

$$\begin{aligned} &111xx555 \\ &= 1\times 10^7 + 1\times 10^6 + 1\times 10^5 + x\times 10^4 + x\times 10^3 + 5\times 10^2 + 5\times 10 + 5 \\ &\equiv -1+1-1+x-x+5-5+5 = 4 \pmod{11}. \end{aligned}$$

上を見て分かるように, 一の位, 十の位, ... に $+$, $-$, ... と交互に符号をつけていけばよい. 同様にすると, 左辺第 2 項は

$$222yy888 \equiv -2+2-2+y-y+8-8+8=6 \pmod{11}.$$

ちょっと大変だが, 頑張って右辺も同様の計算をすると,

$$\begin{aligned} &2492582z4613840 \\ &\equiv 2-4+9-2+5-8+2-z+4-6+1-3+8-4+0 \\ &= -z+4 \pmod{11}. \end{aligned}$$

よって, 与えられた式を法 11 で考えると,

$$4\times 6 \equiv -z+4 \pmod{11}.$$

両辺に $z-24$ を加えて,

$$z \equiv -20 \equiv -20+11\times 2 = 2 \pmod{11}.$$

z は $0\sim 9$ のいずれかなので, $z=2$ である.

注意. x と y も求めたい場合, どのように考えるとスマートなのか, 私も分かりません. mod 9 してみるとか mod 1000 してみるとか, いくつか組み合わせるとできそうですが, 真面目に考えていません. うまい方法を思いついた方は教えてください.

問題は左辺の二つの数のかけ算を計算した後, いくつかの数字を伏せることで作成しました. 結論だけを書いておくと, $x = 7$, $y = 9$, $z = 2$ とすると与えられた等式が成立します.

6. n に関する数学的帰納法により証明する.

$n = 1$ の場合, 示すべき等式について,

$$(\text{左辺}) = 1^2 = 1, \quad (\text{右辺}) = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$$

であるから, (左辺)=(右辺) が成り立つ.

k を正整数とし, $n = k$ のとき示すべき等式が正しい, つまり,

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つと仮定する. $n = k+1$ のときの左辺を考える. これを

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2$$

と書いて, 右辺第一項に帰納法の仮定 ($\clubsuit$) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) \\
&= (k+1) \times \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \\
&= (k+1) \times \frac{(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}.
\end{aligned}$$

ゆえに, $n = k$ のとき示すべき等式が成り立つと仮定すると, $n = k+1$ のときも示すべき等式が成り立つ.

以上より, すべての正整数 n に対し示すべき等式が成り立つ.

注意. 帰納法に関する基本的な問題でした. 帰納法の理解を見ている訳ですので, 帰納法の仮定 ($\clubsuit$) をどのように用いているのか, 分かるように答案を作成しなくてはいけません. この辺りの計算を端折って書いている人は減点です.

7. 背理法により証明する．つまり, $x^2-2x-2=0$ を満たす有理数 x があったとして矛盾を見つけることで証明を行う．

x を $x^2-2x-2=0$ を満たす有理数とする．平方完成をすることで,

$$(x-1)^2=3 \tag{$\heartsuit$}$$

となる．今, x は有理数だから $x-1$ も有理数であり, $x-1=\frac{m}{n}(m,\, n$ は整数, $n\neq 0)$ と書くことができる．必要ならば, 約分をした後で $m,\, n$ を選び直すことにより, $\gcd(m,n)=1$ となるように選ぶことができるので, そのように m と n を選ぶことにする．$x-1=\frac{m}{n}$ を $(\heartsuit)$ に代入して,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=3, \qquad \frac{m^2}{n^2}=3, \qquad m^2=3n^2 \tag{$\clubsuit$}$$

を得る．ここで, 次の事実を用いる．

事実. p を素数, a と b を整数とする．このとき, $p\mid(ab)$ が成り立つならば, $p\mid a$ または $p\mid b$ の少なくとも一方が成立する．

$(\clubsuit)$ より, $3\mid m^2$ であるから, 上の事実を $p=3,\ a=b=m$ として用いることにより, $3\mid m$ が成り立つ．つまり, $m=3k(k$ は整数$)$ と表すことができる．これを $(\clubsuit)$ に代入すると,

$$(3k)^2=3n^2, \qquad 9k^2=3n^2, \qquad 3k^2=n^2.$$

よって, $3\mid m^2$ であるから, 上記の事実を $p=3,\ a=b=n$ として用いることにより, $3\mid n$, つまり $n=3l(l$ は整数$)$ と書けることが分かる．以上より, m と n は 3 を公約数に持つ．これは $\gcd(m,n)=1$ に反する．

よって, $x^2-2x-2=0$ を満たす有理数 x は存在しない．

次のような別解もあります．

背理法で証明する．$x^2-2x-2=0$ を満たす有理数を $x=\frac{m}{n}(m,\, n$ は整数, $n\neq 0)$ と書く．必要ならば約分をし $m,\, n$ を取り直すことで $\gcd(m,n)=1$ となるように $m,\, n$ を選ぶことができるので, そのように $m,\, n$ を取る．$x=\frac{m}{n}$ を $x^2-2x-2=0$ に代入して,

$$\frac{m^2}{n^2}-2\frac{m}{n}-2=0.$$

辺々を n^2 倍して,

$$m^2-2mn-2n^2=0. \tag{$\spadesuit$}$$

ゆえに $m^2=2(mn+n^2)$．よって, m^2 は偶数だから, m も偶数でなくてはいけない．よって, $m=2k(k$ は整数$)$ と書ける．これを $(\spadesuit)$ に代入して,

$$4k^2-4kn-2n^2=0.$$

これを整理して, $n^2 = 2(k^2 - 2kn)$. よって, n^2 は偶数であり, そのためには n も偶数でなくてはいけない. ゆえに $n = 2l$(l は整数) と書ける. 以上より, m と n は 2 を公約数に持つ. これは $\gcd(m, n) = 1$ に反する.

ゆえに, $x^2 - 2x - 2 = 0$ を満たす有理数 x は存在しない.

注意. 代表的な解答例を二つあげましたが, 他にも回答の方法はあると思います. ただし, 「証明なしで特定の数が無理数であることを用いた場合, 原則として本問は 0 点とする」とありますので, 下記のような答案は 0 点です.

> $x^2 - 2x - 2 = 0$ を解いて $x = 1 \pm \sqrt{3}$ である. $\sqrt{3}$ は無理数だから, $1 \pm \sqrt{3}$ も無理数である. よって $x^2 - 2x - 2 = 0$ は有理数の解を持たないので, $x^2 - 2x - 2 = 0$ を満たす有理数 x はない.

この解答で点数をもらうためには, $\sqrt{3}$ が無理数であること, および (有理数)+(無理数)=(無理数) となることの証明を加える必要があります. 注意書きから何を求められているのかを判断するようにしましょう.