2016 年度 基礎数学 A 定期試験　略解 (8/4 更新)

1. (1) 7,　 (2) 37.

2. (1) 存在しない,　 (2) $(x, y) = (8, 10)$ など.

3. 8.

4. (1) 8,　 (2) 6.

5. 1136
(考え方)

$$2016201608020802 = 2016 \times 10^{12} + 2016 \times 10^{8} + 802 \times 10^{4} + 802 \tag{1}$$

にまず注意する. さらに,

$$10^4 = 10000 \equiv 10000 - 10002 = -2 \pmod{10002}$$

であるから, $10^{12} = (10^4)^3 \equiv (-2)^3 = -8 \pmod{10002}$, $10^8 = (10^4)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{10002}$ である. これを式 (1) に用いて,

$$\begin{aligned} 2016201608020802 &\equiv 2016 \times (-8) + 2016 \times 4 + 802 \times (-2) + 802 \\ &= 2016 \times (-4) - 802 = -8866 \pmod{10002} \end{aligned}$$

が成り立つ. あとは,

$$-8866 \equiv -8866 + 10002 \pmod{10002}$$

に注意すれば答えが出る.

6. n に関する数学的帰納法により証明する.

[1] $n = 1$ のとき,

$$(\text{左辺}) = 1^3 = 1, \quad (\text{右辺}) = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

であるから, (左辺)=(右辺) が成り立つ.

[2] k を正の整数とし, $n = k$ のとき示すべき等式が正しい, すなわち,

$$\sum_{j=1}^{k} j^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \tag{2}$$

が成り立つと仮定する. $n=k+1$ のときの左辺を考える. これを

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \sum_{j=1}^{k} j^3 + (k+1)^3$$

と書き, 数学的帰納法の仮定 (2) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

ゆえに, $n=k$ のとき示すべき等式が正しいと仮定すると, $n=k+1$ のときも示すべき等式は正しい.

[1], [2] より, すべての正の整数 n に対し, 示すべき等式は正しい.

6 のコメント: 現在この部分を採点中ですが, 何を仮定して何を示そうとしてるのか, 判然としない答案が多く見受けられます. 次のように, 仮定と結論がはっきりしないものは大幅な減点です.

($n=1$ のときの等式の確認を終えた後で) $n=k$ のとき,

$$\sum_{j=1}^{k} j^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2. \tag{3}$$

$n=k+1$ のとき,

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4} = \cdots \tag{4}$$

上のように書くと, 式 (3) を仮定して式 (4) の最初の等式を示したい, ということが分からなくなります. 上の例のように, 仮定と示したいこと, 計算等により示されたことの区別が全くなされていないものは大幅に減点する予定です. 他には, $n=1$ の場合を確認する段で,

$n=1$ のとき,

$$\sum_{j=1}^{1} j^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2, \qquad 1=1$$

よって, $n=1$ の場合は正しい.

などと書いているのも減点の対象とする予定です．また，

> $n=1$ のとき，
> $$\sum_{j=1}^{1} j^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$
> よって，$n=1$ の場合も正しい．

というのも何を計算し，何を確認したのかがやや判然としませんので，数点減点しました．

他に，
$$\frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4} = \frac{(k^2+3k+2)^2}{4}$$
などのように，どのように計算したのかが分からないものも数点減点しました．示すべき等式は分かっているので，そこからごまかそうとしているのでは，と考えたからです．右辺を展開して左辺と一致することを確認したのであれば，それが分かるように書きましょう．文章等から計算方法を理解できる答案については減点をしていません．

どんな科目でも同じだと思うのですが，記述問題の答案を作成する場合，採点者に「理解している」ということを最大限にアピールしなくてはいけません．採点者に，「この人は分かっていないのでは」と疑義を抱かれてしまう答案ではいけません．特に，採点者が書いていないことを補完しながら採点してくれる，というような考えは捨てるようにしてください．

7. まず，$A \subset B$ を示す．そのためには，
$$d \in A \text{ ならば } d \in B \tag{5}$$
を示せばよい．そのため，$d \in A$ を仮定する．このとき，A の定義から，
$$\text{(i) } d > 0, \qquad \text{(ii) } d \mid a$$
が成り立つ．よって，あとは
$$\text{(iii) } d \mid (2a+b)$$
が言えれば $d \in B$ が示される．以下，これを証明する．$d \in A$ より $d \mid a$ かつ $d \mid b$ が成り立つ．よって，$a = da'$, $b = db'$ $(a', b' \in \mathbb{Z})$ と書ける．ゆえに，
$$2a+b = 2(da') + db' = d(2a'+b').$$
今，a', b', 2 は整数より，$2a'+b'$ も整数．よって，$d \mid (2a+b)$．

(i)–(iii) が示され，$d \in B$ が成り立つ．(5) が分かったので，$A \subset B$ が成り立つ．

次に，$B \subset A$ を示す．そのため，$d' \in B$ とする．このとき，B の定義より，$d' > 0$, $d' \mid a$ が成り立つ．以下，
$$d' \mid b$$

を示す. $d' \in B$ より, $d' \mid a$ かつ $d' \mid (2a{+}b)$ が成り立つ. つまり, $a = d'a''$, $2a{+}b = d'c$(a'', $c \in \mathbb{Z}$) と書ける. ゆえに,

$$b = d'c - 2a = d'c - 2d'a'' = d'(c - 2a'').$$

a'', c, 2 は整数より, $c - 2a''$ も整数. よって, $d' \mid b$ が成り立つ.
以上より, $d' > 0$, $d' \mid a$, $d' \mid b$ が成り立つので $d' \in A$. ゆえに $B \subset A$ が成り立つ.

以上より, $A \subset B$ および $B \subset A$ が示されたので, $A = B$ である.

7 のコメント: この問題は, ユークリッドの互除法の基礎となる公式

$$\gcd(\alpha + k\beta, \beta) = \gcd(\alpha, \beta)$$

に起源があります. ある集合間の等式を示すことで上の公式を証明しましたが, 集合間の等式を少し特殊なものにして出題した次第です. 詳細はプリントの 11 ページを見てください.

この問題は,

- $A \subset B$ を示すためには, $d \in A$(特に $d \mid a$ および $d \mid b$) を仮定し, $d \mid (2a + b)$ を示すこと,
- $B \subset A$ を示すためには, $d \in B$(特に $d \mid a$ および $d \mid (2a + b)$) を仮定し, $d \mid b$ を示すこと

が鍵でした. これらのことをきちんと理解していれば, 難しいことはなかったかと思います. 包含関係が逆になっていたりする場合, 2 点程度減点しましたが, 基本的には **6** よりも大らかに採点しました.