2015 年度 後期 基礎数学 (夜間主) 定期試験　略解

1. (1) 8,　(2) 41.

2. (1) 存在しない,　(2) $(x, y) = (4, 7)$ など.

3. 16.

4. (1) 8,　(2) 6.

5. 25.

エラトステネスの篩 (プリント 20 ページ) を用いて, 100 以下の素数の個数を勘定する問題です. 24 または 26 と答えた人は 5 点の部分点を出しています.

6. n に関する数学的帰納法により証明する.

$n = 1$ のとき,

$$(\text{左辺}) = \sum_{j=1}^{1} j(j-1) = 1 \times (1-1) = 0, \qquad (\text{右辺}) = \frac{1 \times (1+1) \times (1-1)}{3} = 0$$

より, 示すべき等式が成り立つ.

k を正整数とし, $n = k$ のとき示すべき等式が成り立つ, 即ち

$$\sum_{j=1}^{k} j(j-1) = \frac{k(k+1)(k-1)}{3} \tag{1}$$

が成り立つと仮定する. このとき, $n = k+1$ のときの左辺を考える.

$$\sum_{j=1}^{k+1} j(j-1) = \sum_{j=1}^{k} j(j-1) + (k+1)\{(k+1)-1\}$$

と分け, 右辺第一項に帰納法の仮定である式 (1) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j(j-1) &= \frac{k(k+1)(k-1)}{3} + k(k+1) \\
&= k(k+1)\left(\frac{k-1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \\
&= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)-1\}}{3}.
\end{aligned}$$

よって, $n=k$ のとき示すべき等式が正しいと仮定すると, $n=k+1$ のときも示すべき等式が正しい.

以上より, すべての正整数 n に対し, 示すべき等式が成り立つ.

7. (1) $b-a$ が m で割り切れる時, $a \equiv b \pmod{m}$ と書く.
(2) 仮定 $a \equiv b \pmod{m}$ より, $b-a$ は m で割り切れる. 即ち,

$$b-a=mk \tag{2}$$

を満たす整数 k が存在する. 同様に, 仮定 $c \equiv d \pmod{m}$ より,

$$d-c=ml \tag{3}$$

を満たす整数 l が存在する. 今, $ac \equiv bd \pmod{m}$ を証明したいので, $bd-ac$ を考えると,

$$bd-ac=bd-bc+bc-ac=b(d-c)+(b-a)c.$$

これに仮定 (2), (3) を代入して,

$$bd-ac=b(ml)+(mk)c=m(bl+ck).$$

今, $b,\ c,\ k,\ l$ は整数より, それらの和と積で定まる $bl+ck$ も整数である. 以上より, $bd-ac$ は m で割り切れる. つまり, $ac \equiv bd \pmod{m}$ が成り立つ.