2015 年度前期 基礎数学 A 定期試験　略解

1. (1) 7,　(2) 37.

2. (1) $(x, y) = (21, 9)$ など,　(2) 存在しない.

3. 16.

4. (1) 16,　(2) 14.

5. 7.
(考え方) フェルマーの小定理より, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. 今, $2015^{2015} = 12k + r$(k, r は正整数) だったとすると,

$$2^{2015^{2015}} = 2^{12k+r} = (2^{12})^k \times 2^r \equiv 2^r \pmod{13}. \tag{1}$$

つまり, 2015^{2015} を 12 で割った余り r を求めることができれば, 求めたい余りを計算することができそうである.

今, $2015 \div 12 = 167 \cdots 11$ より, $2015 \equiv 11 \pmod{12}$. よって, $2015^2 \equiv 11^2 \equiv 1 \pmod{12}$. 故に,

$$2015^{2015} = 2015^{2\times1007+1} = (2015^2)^{1007} \times 2015 \equiv 11 \pmod{12}.$$

即ち, 2015^{2015} を 12 で割った余りは 11 である.

よって, $r = 11$ として式 (1) が成立するので,

$$2^{2015^{2015}} \equiv 2^{11} \pmod{13}.$$

あとは 2^{11} を 13 で割った余りを計算する, もしくはちょっと工夫すると,

$$2^{11} = 2^{11} \times 1 \equiv 2^{11} \times (2 \times 7) = 2^{12} \times 7 \equiv 7 \pmod{13}$$

などのように計算できる. 何れにしても, 求める答えは 7 である.

6. 背理法で証明する. つまり, $x^2 = 10$ を満たす有理数 x が存在したとして矛盾を導く. $x^2 = 10$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}$(m, n は整数で $n > 0$) と書く. 必要なら, $\frac{m}{n}$ を約分し m と n を取り直すことで, m と n は互いに素 となるように選ぶことができる. $x = \frac{m}{n}$ を $x^2 = 10$ に代入して,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 10, \quad \text{即ち}, \quad m^2 = 10n^2. \tag{2}$$

右辺は偶数より, m^2 も偶数. そのためには m も偶数でなくてはいけない. よって, $m = 2k$(k は整数) と書ける. これを式 (2) に代入して,

$$(2k)^2 = 10n^2, \quad \text{即ち}, \quad 2k^2 = 5n^2.$$

左辺は偶数より, $5n^2$ も偶数. そのためには n^2 が偶数, さらには n が偶数でなくてはいけない. よって, $n = 2l$(l は整数) と書ける.

以上より, m と n は公約数 2 を持つ. しかし, これは下線を引いた「m と n は互いに素」に矛盾する.

よって, $x^2 = 10$ を満たす有理数 x は存在しない.

6 はまだ採点していません. 採点が終わったら追記する予定です.

7. (1) $m = -1$, $n = 2$ とすると, $m \in \mathbb{Z}$ かつ $n \in \mathbb{Z}$ で $5m + 3n = 1$ である. よって, $1 \in X$ である.

(2) $X \subset \mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z} \subset X$ を示すことで $X = \mathbb{Z}$ を示す.

[1] まず, $X \subset \mathbb{Z}$ を示す. そのためには,

$$a \in X \text{ ならば } a \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

を示せば良い. $a \in X$ とすると, X の定義から $a = 5m + 3n (m, n \in \mathbb{Z})$ と書ける. 整数の積, 和は整数なので, $5m + 3n \in \mathbb{Z}$. 即ち $a \in \mathbb{Z}$ が成り立つ. よって, 主張 (3) が示され, $X \subset \mathbb{Z}$ が言えた.

[2] 次に $\mathbb{Z} \subset X$ を示す. そのためには,

$$k \in \mathbb{Z} \text{ ならば } k \in X \tag{4}$$

を示せば良い. $k \in \mathbb{Z}$ とする. 今, $5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$ だから, 辺々を k 倍して,

$$5 \times (-k) + 3 \times (2k) = k.$$

よって, $m = -k$, $n = 2k$ とすると, $m \in \mathbb{Z}$ かつ $n \in \mathbb{Z}$ で, $5m + 3n = k$ である. よって, $k \in X$ である. 故に, 主張 (4) が示され, $\mathbb{Z} \subset X$ が言えた.

[1], [2] より, $X \subset \mathbb{Z}$ かつ $\mathbb{Z} \subset X$ が言え, $X = \mathbb{Z}$ が成り立つ.

7 の採点について (採点中:基準を変えるかもしれないので注意)

(1) は, $5m + 3n = 1$ を満たす整数 m, n を一組具体的に与えていれば OK です. ただし, 明らかに余計なことを書いている答案や, 集合の記号の使い方に誤りが見られる答案で目に余るものは, 減点しています. 整数係数一次方程式の定理を正確に適用している人も正解としていますが, この類の答案はかなり厳しく採点しています. つまり, 整数解が存在するための (必要) 十分条件を正しくチェックしていることがはっきり分かるものに限り満点, 少しでも不明確な点があれば 0 点としています. $5m + 3n = 1$ の整数解は一目ですぐに見つかりますので, 具体的な整数解を書く方がお勧めです.

(2) は, $X \subset \mathbb{Z}$ の証明に 5 点, $\mathbb{Z} \subset X$ の証明に 5 点として採点しています. ただし, [1],

[2] の議論で何が証明できたのか ([1] の議論で $X \subset \mathbb{Z}$ が分かり, [2] の議論で $\mathbb{Z} \subset X$ が分かる, ということです) が判然としないものについては, 数点減点しています. 例えば, [1] の議論で $X \subset \mathbb{Z}$ が証明できた, とのみ書いてある答案には 5 点の部分点をつけています. 一方, [1] の議論で $X = \mathbb{Z}$ が証明できた, と書いてある答案には今のところ, 3 点の部分点しかつけていません.