

基礎数学 A 定期試験 問題用紙

平成 27 年 7 月 28 日 (火)3 講目 (12:50~14:00, 70 分)

注意事項:

- 指定された座席に座ること。試験監督から認められた場合を除き、教室指定、座席指定を守らない学生の答えは採点の対象としない。採点の際に教室指定等が守られていないことが判明した場合も、同様の扱いとする。
- 問題用紙 (本紙)1 枚, 計算用紙 1 枚, 解答用紙 1 枚。
- 学生証, 仮学生証のいずれかを所有している学生のみ受験を認める。
- 筆記用具と計時機能のみの時計以外, 持ち込み不可である。携帯電話, スマートフォン等の時計使用は認めない。
- 机に文字等が書かれている場合, 全て消すこと。消すことができない場合, 監督者に申し出ること。なお, 試験前, 試験最中を問わず, 机への記入, 計算は不正行為とみなす。
- 問題の解答はすべて解答用紙の所定の位置に記入すること。解答は必ず枠内に収めること。枠外への記述は無視して採点する。
- 試験開始直後に学生番号, 氏名を解答用紙の所定の欄 (2 か所) に記入すること。裏面に解答しない場合でも, 必ず裏面にも番号と氏名を記入すること。氏名 (フルネーム) が全くないものは採点の対象外, 部分的な記入漏れは 5 点減点する。
- 極端に薄い字や小さい字, 読ませるつもりのない字など, 判読困難なものは採点の対象外とする。また, 消したかどうか分からない文字や二通り以上に読むことのできる文字は悪意を持って採点する (= 意図的に配点の少ないほうに解釈する)。その他, 採点者に優しくないと思われる答案も減点する。
- 解答用紙を必ず提出すること。提出がない場合, その学生は呼び出しを受け, 最悪の場合, 不正行為と認定される。問題用紙, 計算用紙は持ち帰ること。
- この試験は 110 点満点である。

1.(10点×2=20点) 次の最大公約数を計算せよ (答えのみでよい).

(1) $\gcd(35, 63)$, (2) $\gcd(2701, 3071)$.

2.(10点×2=20点) 次の方程式を満たす整数の組 (x, y) を一組答えよ. 方程式を満たす整数の組 (x, y) が存在しない場合, 「存在しない」と書くこと (答えのみでよい).

(1) $31x - 72y = 3$, (2) $22x - 55y = 4$.

3.(10点) 2^{400} を 37 で割ったときの余りを, $0, 1, \dots, 35, 36$ から選べ (答えのみでよい).

4.(10点×2=20点) 集合 A, B を, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ で定める. A から B への写像は全部で (1) 個, A から B への全射な写像は全部で (2) 個ある. (1) および (2) に適切な数字を入れよ.

5.(10点, かなり難?) $2^{2015^{2015}}$ (2 の 2015^{2015} 乗) を 13 で割ったときの余りを, $0, 1, \dots, 11, 12$ から選べ.

ヒント: フェルマーの小定理を利用せよ. ただし, フェルマーの小定理を適用する際の仮定 (前提条件) に注意すること. 多少の試行錯誤も必要と思われる. (必ずしもこのヒントを参考にする必要はない.)

6.(15点) $x^2 = 10$ を満たす有理数 x は存在しないことを証明せよ. ただし, 実質的に「 $\sqrt{10}$ が無理数だから」としか書いていない答えは, 証明して欲しいことを言い換えているだけなので 0 点とする. また, 特定の数が無理数であることを用いた証明は, その数が無理数であることを証明しない限り, 大幅に減点する.

7.(5 + 10 = 15 点) \mathbb{Z} を整数全体の集合とする. また, 集合 X を次で定める:

$$X = \{5m + 3n \mid m \in \mathbb{Z} \text{ かつ } n \in \mathbb{Z}\}.$$

例えば, $m = n = -1$ とすると, $m \in \mathbb{Z}$ かつ $n \in \mathbb{Z}$ で $5m + 3n = -8$ だから, $-8 \in X$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) $1 \in X$ が成り立つことを, 1~2 行程度で簡潔に説明せよ.

(2) $X = \mathbb{Z}$ が成り立つことを証明せよ. 自分の考えたことが採点者に伝わるよう, 最大限の努力をすること. 特に, 何を仮定して何を証明しようとしているのか, 良く分かるように答案を作成すること.

以上

解答用紙提出の前に

解答用紙の表裏に学生番号, 氏名の書き忘れがないことを確認してください. 問題用紙 (本紙) と計算用紙は持ち帰ってください. また, 学生証も忘れないようにしてください.