経済数学定期試験 略解 (速報)

経済数学定期試験は採点中ですが, 解答例を記しておきます. 極めて大雑把な略解ですので, 記述問題については下記の略解では説明不十分で減点されるかもしれません (特に, 連立方程式の解き方は全く説明しておらず, 言葉を足す必要があります).

1.(1) $f'(x) = 4x^3 - 3$, (2) $f'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$.

2. $f_x(x, y) = 5x^4 - 2y$, $f_y(x, y) = -2x - 6y$, $f_{xx}(x, y) = 20x^3$,
$f_{xy}(x, y) = -2$, $f_{yx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -6$.

注意: $f'_x(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ などといった記号は通常用いません. 正しくは, これらは $f_x(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ または $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ と書きます. 誤った記号を用いた答案は, 大問 **2** で得た点数から 2 点 ∼ 5 点程度, 減点する予定です.

また, 偏微分に関しては, どの変数について偏微分しているのかを明記しないといけません. 従って, 「二階偏微分は, $20x^3$, -2, -2, -6」のようにどの文字で偏微分したのか分からない答案は 10 点以上減点する予定です.

3. $n = 9$.

4. $z = (x - 1) + 2(y + 1)$ または $z = x + 2y + 1$.

注意: 平面や曲面を表す方程式は, 「ある方程式を満たす点全体の集まり」のことです. 上の解答で $z =$ が抜けているのは方程式と見ることはできないですので, 3 点程度, 減点する予定です.

また, 接平面は平面の一種で, 平面の方程式は $ax + by + cz = d$ (a, b, c, d は定数で, a, b, c がすべて 0 ではない) の形になるものでなくてはいけません. 従って, 答えに x^2 とか y^3 が出てきた人は反省してください.

5. (1) $\dfrac{1}{2}$, (2) $\dfrac{27}{16}$, (3) 2, (4) -27.

6.(略解) $f_x(x, y) = 6x^2 - 6y - 12$, $f_y(x, y) = -6x + 6y$ だから,

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 - 6y - 12 = 0 \\ -6x + 6y = 0. \end{cases}$$

これを解いて, $(x, y) = (-1, -1)$, $(x, y) = (2, 2)$.

$f_{xx}(x, y) = 12x$, $f_{xy}(x, y) = -6$, $f_{yy}(x, y) = 6$ より, (ヘシアン)$= 72x - 36$. よって,

- $(x, y) = (-1, -1)$ のとき, (ヘシアン)$= -108 < 0$. 故に, $f(x, y)$ は $(x, y) = (-1, -1)$ で極値を取らない.

- $(x,y)=(2,2)$ のとき, (ヘシアン)$=108>0$. また, $f_{xx}(2,2)=24>0$ より, $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,2)$ で極小値を取る. その値は $f(2,2)=-20$.

以上より, $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,2)$ で極小値 -20 を取り, 他の (x,y) で極値を取らない.

7.(略解) $f(x,y)=x(y+1)$, $g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおく. さらに,

$$L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x(y+1)+\lambda(x^2+y^2-1)$$

とおく. $L_x(x,y;\lambda)=y+1+2\lambda x$, $L_y(x,y;\lambda)=x+2\lambda y$, $L_\lambda(x,y;\lambda)=x^2+y^2-1$ だから,

$$\text{(I)}\begin{cases}L_x(x,y;\lambda)=0\\ L_y(x,y;\lambda)=0\\ L_\lambda(x,y;\lambda)=0\end{cases}\iff\begin{cases}y+1+2\lambda x=0\\ x+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

連立方程式 (I) を (x,y) について解いて,

$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad(0,-1)$$

を得る.

一方, $g_x(x,y)=2x$, $g_y(x,y)=2y$ より,

$$\text{(II)}\begin{cases}g_x(x,y)=0\\ g_y(x,y)=0\\ g(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x=0\\ 2y=0\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

最初の二式より $x=y=0$ だが, これは最後の式 $x^2+y^2=1$ を満たさない. よって, 連立方程式 (II) は解を持たない.

(I) の解 (および (II) の解) を $f(x,y)$ に代入して,

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4},\qquad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4},\qquad f(0,1)=0.$$

この三つの中で一番大きい $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ が最大値, 一番小さい $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ が最小値である.

以上より, $x^2+y^2=1$ の下, $x(y+1)$ は

- $(x,y)=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,
- $(x,y)=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ のとき最大値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

を取る.