平成 26 年度基礎数学 A 期末試験 略解

1. 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66. □

2. (1) 7, (2) 61. □

3. (1) 存在しない, (2) $(x, y) = (24, 10)$($(x, y) = (-7, -3)$ などでも正解) □

4. (1) 30, (2) 1. □

5. 7583. □

6. 背理法で証明する．つまり, $x^3 = 4$ を満たす有理数 x が存在したとして矛盾を言う．$x^3 = 4$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}$(ただし, m, n は整数, $n > 0$) とする．必要なら約分をし, m, n を取り直すことで $\underline{\gcd(m, n) = 1 \text{ としてよい}}$.[1] $x = \frac{m}{n}$ を $x^3 = 4$ に代入して,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 4, \qquad m^3 = 4n^3. \tag{1}$$

右辺 $4n^3$ は 2 で割れているので, 左辺 m^3 も 2 で割れなくてはならない．2 は素数なので, m^3 が 2 で割り切れるには m が 2 で割れなくてはならない．よって, $m = 2m'$(m' は整数) と書ける．これを式 (1) に代入して,

$$(2m')^3 = 4n^3, \qquad 2(m')^3 = n^3.$$

左辺 $2(m')^3$ が 2 で割れているので, 右辺 n^3 も 2 で割れなくてはならない．2 は素数なので, n^3 が 2 で割り切れるには n が 2 で割れなくてはならない．よって, $n = 2n'$(n' は整数) と書ける．

以上より, m と n は公約数 2 を持つ．これは下線を引いた $\gcd(m, n) = 1$ に反する．よって, $x^3 = 4$ を満たす有理数 x は存在しない． □

注意. 「m^3 が 4 で割り切れるから m も 4 で割り切れる」は誤りです．$m = 2$ とすると, $m^3(= 8)$ は 4 で割れますが, m は 4 で割れません．

7. (1) $b - a$ が m で割り切れるとき, $a \equiv b \pmod{m}$ と書く．
(2) $a \equiv b \pmod{m}$ より, $b - a$ は m で割り切れる．つまり, 適当な整数 k を用いて,

$$b - a = mk$$

が成り立つ．同様に, $b \equiv c \pmod{m}$ より, $c - b$ は m で割り切れる．つまり, 適当な整数 l を用いて,

$$c - b = ml$$

が成り立つ．今, 上記二式より,

$$c - a = (c - b) + (b - a) = mk + ml = m(k + l).$$

k と l は整数なので, $k + l$ も整数である．よって, $c - a$ は m で割り切れる．つまり, $a \equiv c \pmod{m}$ が成り立つ。 □

[1]暫定版の解答例に言葉を少し補いました．

コメント: 今回の試験はかなり良くできていたと思います. 記述問題を易しくしすぎたと思いますので, 記述問題については易しい基準, 厳しい基準の二通りで採点したいと思います. 基本は易しい基準で採点しますが, 易しい基準で秀と判断されるもののみ, 厳しい基準で採点します. 厳しい基準で秀に該当するものを秀に, 優以下になるものについては 89 点の優としたいと思います.

厳しい基準とは, 言葉の使い方を細かくチェックし, 分かっていないと思われるものはどんどん減点していく, という方針です. 例えば, **6** の問題については, 次のような文章で証明を始めた場合, 減点することにします.

> 背理法で証明する. $x^3 = 4$ を満たす有理数 x を $x = \frac{m}{n}(m,\, n$ は整数, $n > 0)$ と書く. このとき, $\gcd(m, n) = 1$ である.

$x^3 = 4$ を満たす有理数 x を既約分数に直した結果, その分子と分母の最大公約数が 1 になるのであって, x を分数の形に表したら直ちに分子と分母の最大公約数が 1 になる訳ではありません.

以上は一例ですが, 接続詞の使い方がおかしいものや余計なことを書いてあるものも厳しい基準では減点していく予定です. (なお, 易しい基準でも, **7** (1) で正しいことも書いてあるが誤ったことも書いてある場合, しかるべき点数を減点しています.)

追記:

厳しめの基準での採点も終わりました. 上に書いた通り, 接続詞 (「従って」, とか「即ち」など) などから証明をきちんと理解できているかを見ました. このことと共に, 厳しめの基準で重視したのは次の部分です.

- (上にも書きましたが)**6** の証明の最初の部分. 一つの有理数 x を $x = m/n(m,\, n$ は整数) と表すとき, $m,\, n$ の取り方の組み合わせは多数あります. しかし, 約分を駆使して必要ならば $m,\, n$ を取り直すことで, $x = m/n$ かつ $\gcd(m, n) = 1$ を満たす整数 $m,\, n$ を取る <u>ことができる</u> わけです. このことが良く分かっていないと思われるものは減点しました.

- (**6** と **7** 共通) 出てくる文字が何なのか説明がないもの. その文字はどういう数なのか (例えば整数, 有理数, 実数) を説明していないものは減点しました.

- **7**(2) の最後の部分: $c - a = m \times \underline{(\text{整数})}$ となることの説明がないもの. $c - a = m \times (\text{何か})$ と表されても, (何か) が整数であることに言及しない限り, $a \equiv c \pmod{m}$ の証明にはなりません.

厳しめの基準では, 分かっているかどうか判断がつかない答案も減点です. 以上のことについては, 厳しめの基準では結構派手に減点しました. ただし, 記述が不十分であるものの理解してもらおうと努力していることが読み取れるものは, 減点の幅を小さくしています.

一般的に, 筆記試験は答案に書かれていること<u>のみ</u>から理解度を測るものです. 与えられたスペースの範囲内で, 「自分は理解している」ということを最大限に表現する努力をしなくてはなりません. 授業プリントや参考書にこう書いてあるからこの通り書けばいいんだ, と思うのではなく, 理解していることや考えたことをどう書けば相手に伝わるのかをよく考えるようにしてください.[2]

[2]念のために言っておきますが, 授業プリントでも参考書でも書き手はかなり慎重に言葉を選んでいます. どうしてこの言葉を選んでいるのかを考えるのもいいことだと思います. ただ, 授業プリントや参考書は読み手に理解してもらうことを目的として書いているものです. 自身の理解を表現する試験では適切な言葉遣いではないこともある, ということは心に留めておいてください.