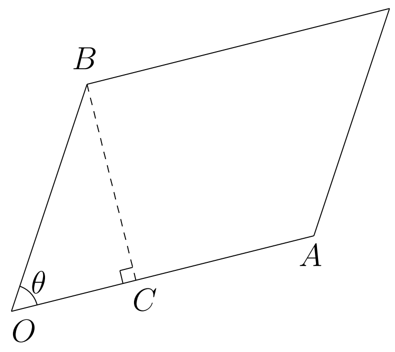
基礎ゼミナール最終レポート解答例

担当者: 赤塚　広隆

問題 1. 点 B から直線 OA に垂線をおろし, 直線 OA と垂線の交点を C とする.



平行四辺形の面積は底辺 $\times$ 高さで求まるので, 求める面積を S とおくと,

$$S = |\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{BC}|. \tag{1}$$

となる. $|\overrightarrow{BC}|$ を計算するため, $\theta = \angle AOB$ とおく. $\triangle OBC$ は直角三角形であるので, 三角関数 $\sin$ の定義から,

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{OB}|}, \qquad \text{つまり } |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OB}|\sin\theta.$$

これを式 (1) に代入して,

$$S = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta. \tag{2}$$

$\sin\theta$ を求める. ベクトルの内積の公式 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$ から,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}.$$

三角関数の基本公式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ および $\sin\theta > 0$ に注意すると,

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}\right)^2} = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}.$$

これを式 (2) に代入して,

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}.$$

$\overrightarrow{OA} = (a,b)$, $\overrightarrow{OB} = (c,d)$ だったので,

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2} = \sqrt{a^2d^2-2abcd+b^2d^2} \\ &= \sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc|. \end{aligned}$$

ゆえに, 求める面積は $|ad-bc|$ である. □

問題 2. (1) $0\vec{v}+1\vec{0}=\vec{0}$ であるので, $t_1\vec{v}+t_2\vec{0}=\vec{0}$ は $(t_1,t_2)=(0,0)$ 以外の解 $(t_1,t_2)=(0,1)$ を持つ．よって, $\vec{v}$ と $\vec{0}$ は線形従属である．

(2) $t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}=\vec{0}$ とする．左辺を計算すると, $t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}=(2t_1+3t_2, 3t_1+4t_2)$. $t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}=\vec{0}$ の成分を比較して,

$$\begin{cases} 2t_1+3t_2=0, \\ 3t_1+4t_2=0. \end{cases} \tag{3}$$

(第一式)×4−(第二式)×3 を計算すると, $-t_1=0$, 即ち, $t_1=0$ を得る．これを連立方程式のどちらかに代入して $t_2=0$ を得る．以上より, $t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}=\vec{0}$ ならば, $(t_1,t_2)=(0,0)$ でなくてはいけないことが分かった．つまり, $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ は線形独立である．

(3) $\vec{v_2}=-3\vec{v_1}$ となることが容易に確認できる．よって, $3\vec{v_1}+\vec{v_2}=\vec{0}$ が成り立つ．ゆえに, $t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}=\vec{0}$ は $(t_1,t_2)=(0,0)$ 以外の解 $(t_1,t_2)=(3,1)$ を持つ．つまり, $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ は線形従属である．

(4) まず, $\underline{\vec{v_1}\text{ と }\vec{v_2}\text{ が線形従属の場合}}$ を考える．この仮定から, $t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}=\vec{0}$ は $(t_1,t_2)=(0,0)$ 以外の解 $(t_1,t_2)=(a,b)$ を持つ．つまり, $a\vec{v_1}+b\vec{v_2}=\vec{0}$ を満たす実数の組 (a,b) で, a, b が共に 0 とならないものが存在する．$t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}+t_3\vec{v_3}=\vec{0}$ は $(t_1,t_2,t_3)=(0,0,0)$ 以外の解 $(t_1,t_2,t_3)=(a,b,0)$ を持つ．つまり, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ が線形従属の場合, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形従属である．

次に, $\underline{\vec{v_1}\text{ と }\vec{v_2}\text{ が線形独立の場合}}$ を考える．この場合, 教科書 [1, 92 ページ, 定理 6.2] から, すべての平面ベクトルは $\square\vec{v_1}+\triangle\vec{v_2}$ の形で書けたので, $\vec{v_3}$ もその形で書ける．つまり,

$$\vec{v_3}=c\vec{v_1}+d\vec{v_2}$$

を満たす実数 c, d が存在する．これを

$$c\vec{v_1}+d\vec{v_2}+(-1)\vec{v_3}=\vec{0}$$

と書き換える．すると, $t_1\vec{v_1}+t_2\vec{v_2}+t_3\vec{v_3}=\vec{0}$ は $(t_1,t_2,t_3)=(0,0,0)$ 以外の解 $(t_1,t_2,t_3)=(c,d,-1)$ を持つことが分かる．つまり, $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ が線形独立の場合も, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形従属である．

以上より, いずれの場合も $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形従属である． □

注意. $\vec{v_1},\ldots,\vec{v_n}$ が線形独立であることを示すには, $t_1,\ldots,t_n$ に関する方程式 $t_1\vec{v_1}+\cdots+t_n\vec{v_n}=\vec{0}$ を正確に解き, $(t_1,\ldots,t_n)=(0,\ldots,0)$ に限ることを言う必要があります．一方, $\vec{v_1},\ldots,\vec{v_n}$ が線形従属であることを言うには, $t_1,\ldots,t_n$ に関する方程式 $t_1\vec{v_1}+\cdots+t_n\vec{v_n}=\vec{0}$ の解をすべて求める必要はなく, $(t_1,\ldots,t_n)\neq(0,\ldots,0)$ なる実数解を $\underline{\text{一つ}}$ 見つければ十分です．上の解答例の (1), (3), (4) では線形従属であることを示す際に, $t_1\vec{v_1}+\cdots+t_n\vec{v_n}=\vec{0}$ の解を $\underline{\text{一つ}}$ 見つけるための式変形等を行いました．解を $\underline{\text{すべて}}$ 求める観点からは邪道に見えるかもしれませんが, 解を $\underline{\text{一つ}}$ 見つければ十分なので上のような解答ができるのです．

問題 3. (1) $t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} = \vec{0}$ とする．左辺を計算すると, $t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} = (t_1 + 2t_2, 2t_1 + 3t_2, 3t_1 + 4t_2)$. $t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} = \vec{0}$ の成分を比較して,

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 = 0, \\ 2t_1 + 3t_2 = 0, \\ 3t_1 + 4t_2 = 0. \end{cases}$$

この連立方程式は, 連立方程式 (3) に新たな条件 $t_1 + 2t_2 = 0$ を付け加えたものであり, 連立方程式 (3) の解は $(t_1, t_2) = (0, 0)$ に限られていた．よって, 上記連立方程式も解は $(t_1, t_2) = (0, 0)$ に限られる．よって, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ は線形独立である．

(2) $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_3}$, つまり,

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} + (-1)\vec{v_3} = \vec{0}$$

が成り立つ．よって, t_1, t_2, t_3 に関する方程式 $t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} + t_3\vec{v_3} = \vec{0}$ は, $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 0)$ 以外の解 $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, -1)$ を持つ．よって, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形従属である．

(3) 必ずしも $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形独立とは言えない．

(線形独立とならない例) $\vec{v_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{v_3} = (1, 1, 0)$ とする．

まず, $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ が線形独立であることを見る．$t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} = \vec{0}$ とすると, 成分を計算して $(t_1, t_2, 0) = (0, 0, 0)$. よって, $t_1 = t_2 = 0$, つまり, $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ は線形独立である．

次に $\vec{v_2}$ と $\vec{v_3}$ が線形独立であることを見る．$t_2\vec{v_2} + t_3\vec{v_3} = \vec{0}$ とする．辺々の成分を比較して,

$$\begin{cases} t_3 = 0, \\ t_2 + t_3 = 0. \end{cases}$$

第一式を第二式に代入して, $t_2 = t_3 = 0$ を得る．つまり, $\vec{v_2}$ と $\vec{v_3}$ は線形独立である．

次に $\vec{v_3}$ と $\vec{v_1}$ が線形独立であることを見る．$t_3\vec{v_3} + t_1\vec{v_1} = \vec{0}$ とする．辺々を比較して,

$$\begin{cases} t_1 + t_3 = 0, \\ t_3 = 0. \end{cases}$$

第二式を第一式に代入して, $t_3 = t_1 = 0$ を得る．つまり, $\vec{v_3}$ と $\vec{v_1}$ は線形独立である．

最後に $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ が線形従属であることを見る．$\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ であることに注意する．これを

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} + (-1)\vec{v_3} = \vec{0}$$

と変形する．すると, $t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} + t_3\vec{v_3} = \vec{0}$ は $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 0)$ 以外の解 $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, -1)$ を持つことが分かる．故に, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形従属である．

以上より, 「$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ は線形独立, $\vec{v_2}$ と $\vec{v_3}$ は線形独立, $\vec{v_3}$ と $\vec{v_1}$ は線形独立ならば, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形独立である」という主張は必ずしも成り立たないことが分かった． □

参考文献

[1] 原岡喜重, なるほど高校数学ベクトルの物語, ブルーバックス, 講談社 (2008).