基礎ゼミナール

担当者: 赤塚　広隆

以下の課題を**A4 レポート用紙**に解答し, **7/19(金) の授業開始前まで**に提出すること. **途中過程も含めて**レポートを作成すること. 「線型代数」, 「線形代数」の名前のついた本の「線形独立 (または一次独立)」で索引を調べるといろいろ出てくると思うので, 必要に応じて図書館の本も利用することを勧める. また, 友達や私に相談しても構わないが, 調べた本 (著者と本のタイトル, 出版年を記入すること) や相談した人の名前を必ず明記すること.

今回の問題は難しいものも入っているので, すべて解ける必要はない. 問題を解いたり調べたりしたときに考えたことや, 問題に対する感想もレポートに記載してよい.

問題 1. xy-平面内に異なる二点 A, B を取る. 原点を O としたとき, O, A, B は一直線上にないと仮定する. A の座標を (a,b), B の座標を (c,d) とする. 線分 OA, 線分 OB を二辺に持つ平行四辺形の面積を a, b, c, d を用いて表せ. (途中計算では平方根記号 $\sqrt{\ }$ を使っても良いが, 最終的な答えでは平方根記号を用いないこと. なお, 絶対値記号は用いてよい.)

問題 2. 平面ベクトル $\vec{v_1}=(a_1,b_1),\dots,\vec{v_n}=(a_n,b_n)$ が**線形独立**であるとは,

$$t_1\vec{v_1}+\cdots+t_n\vec{v_n}=\vec{0}$$

を満たす実数の組 $(t_1,\dots,t_n)$ は $(t_1,\dots,t_n)=(0,\dots,0)$ に限るときを言う. そうでないとき, $\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}$ は**線形従属**であると言う. 以上を踏まえ, 次の問に答えよ.
(1) $\vec{v}$ を勝手な平面ベクトル, $\vec{0}=(0,0)$ とするとき, $\vec{v}$, $\vec{0}$ は線形従属であることを, 上の定義に基づいて説明せよ.
(2) $\vec{v_1}=(2,3)$, $\vec{v_2}=(3,4)$ は線形独立か否かを, 上の定義に基づいて答えよ.
(3) $\vec{v_1}=(1,2)$, $\vec{v_2}=(-3,-6)$ は線形独立か, 理由をつけて答えよ.
(4) $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ を勝手な平面ベクトルとするとき, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形従属であることを説明せよ. 教科書に書いてある定理を用いてよいが, どの定理を用いたのか, 明記すること.

問題 3. 空間ベクトルについても前問と同様に線形独立, 線形従属を定義する. 次の問に答えよ.
(1) $\vec{v_1}=(1,2,3)$, $\vec{v_2}=(2,3,4)$ は線形独立か, 理由をつけて答えよ.
(2) $\vec{v_1}=(1,2,3)$, $\vec{v_2}=(3,4,5)$, $\vec{v_3}=(4,6,8)$ は線形独立か, 理由をつけて答えよ.
(3) $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ を空間ベクトルとし, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ は線形独立, $\vec{v_2}$ と $\vec{v_3}$ は線形独立, $\vec{v_3}$ と $\vec{v_1}$ は線形独立であったとする. このとき, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形独立と言えるか. 線形独立であると言える場合にはその理由を答えよ. 必ずしも線形独立と言えない場合は, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ は線形独立, $\vec{v_2}$ と $\vec{v_3}$ は線形独立, $\vec{v_3}$ と $\vec{v_1}$ は線形独立だが, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ は線形従属となる $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ の具体例を一つ挙げよ.