基礎数学 B 定期試験解答例

1. 1, 3, 17, 51. □

2. (1) 7,　(2) 83. □

(1) は互除法を使うまでもなく解けるでしょう. (2) はユークリッドの互除法を用いて計算してください.

3. (1) $(x, y) = (15, 12)$,　(2) 存在しない. □

(1) ユークリッドの互除法を活用すると上の答えが得られます. なお, 解答は一つだけではなく, 他にも例えば $(x, y) = (-6, -5)$ などがあります. x, y が共に整数であり, 代入して $17x - 21y = 3$ を満たしていれば正解です.

(2) どんな整数 (x, y) に対しても左辺は 23 で割れますが, 右辺は 23 で割れません. よって, 「存在しない」が正解になります.

4. (1) 21,　(2) 1. □

(1) フェルマーの小定理から, $2^{58} \equiv 1 \pmod{59}$ が成り立ちます. また, $300 = 58 \times 5 + 10$ と指数法則に注意すると,

$$2^{300} = 2^{58\times5+10} = (2^{58})^5 \times 2^{10} \equiv 2^{10} \pmod{59}$$

が成り立ちます. あとは $2^{10} = 1024$ を 59 で割るなり, $2^6 = 64 \equiv 5 \pmod{59}$ を用いるなりして計算すると答えが得られます.

(2) ウィルソンの定理から, $58! \equiv -1 \pmod{59}$ が成り立ちます. また, $58! = 57! \times 58 \equiv 57! \times (-1) = -(57!) \pmod{59}$ に注意すると, $-(57!) \equiv -1 \pmod{59}$ が得られます. 両辺に -1 を掛けて所望の結果を得ます.

5. 2. □

これぐらいの問題だと右辺を左辺第一項で実際に割ってもできなくもありません. ただ, 合同式を上手く利用して計算して欲しい, というところに出題の意図があります. こちらの望んだ解答を記しておきます.

201402046 を

$$201402046 = 2\times10^8+0\times10^7+1\times10^6+4\times10^5+0\times10^4+2\times10^3+0\times10^2+4\times10^1+6$$

と表してみます. 今, $10 \equiv 1 \pmod{9}$ だから, 非負整数 n に対し $10^n \equiv 1^n = 1 \pmod{9}$ が成り立ちます. これを上式に適用して,

$$201402046 \equiv 2+0+1+4+0+2+0+4+6 = 19 \equiv 1 \pmod{9}$$

が成立します.

同様にして,

$$\begin{aligned} 4153\square 871 &\equiv \square + 2 \pmod 9, \\ 8364805195654066 &\equiv 4 \pmod 9) \end{aligned}$$

が成り立ちます. よって, 問題文の等式の両辺を法 9 で考えて,

$$1 \times (\square + 2) \equiv 4 \pmod 9$$

が得られます. 両辺から 2 を引いて $\square \equiv 2 \pmod 9$ が成り立ちます. 故に, $\square$ の候補として $\ldots, -7, 2, 11, \ldots$ が挙げられますが, $\square$ は $0, 1, \ldots, 9$ のいずれかですので, $\square$ には 2 が入ることが分かります

6. 背理法により証明する. つまり, $x^4 = 2$ を満たす有理数 x があったとして矛盾を導く. まず, $x^4 = 2$ を満たす有理数 x の一つを $x = \frac{m}{n}$ (m, n は整数で $n > 0$) とおく. 必要なら約分することで $\underline{\gcd(m,n) = 1}$ としてよい. これを $x^4 = 2$ に代入して,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^4 = 2, \qquad m^4 = 2n^4 \tag{1}$$

を得る. 右辺は 2 で割れるので左辺も 2 で割れなくてはならず, $2 \mid m^4$ が成り立つ. 今, 2 は素数なので $2 \mid m$ が成り立つ.[1] よって, $m = 2m'$(m' は整数) と書ける. これを式 (1) に代入して,

$$(2m')^4 = 2n^4, \qquad 8(m')^4 = n^4$$

が成り立つ. 左辺が 2 で割れているので, $2 \mid n^4$ が成り立つ. 2 は素数なので, $2 \mid n$ が成り立つ. つまり, $n = 2n'$(n' は整数) と書ける.

以上より, m と n は共通因数 2 を持つ. しかし, これは下線を引いた $\gcd(m,n) = 1$ に反する. よって, $x^4 = 2$ を満たす有理数 x は存在しない. $\square$

7. (1) $a \equiv b \pmod m$ とは, $b - a$ が m で割り切れることを意味する.

(2) 仮定 $a \equiv b \pmod m$ より $b - a$ は m で割り切れる. つまり, $b - a = mk$ を満たす整数 k が存在する. また, 仮定 $c \equiv d \pmod m$ より, $d - c$ は m で割り切れる. つまり, $d - c = ml$ を満たす整数 l が存在する. ここで,

$$bd - ac = bd - bc + bc - ac = b(d - c) + (b - a)c = b(ml) + (mk)c = m(bl + ck)$$

に注意する. b. c, k, l は整数だから, それらの積, 和である $bl + ck$ も整数である. 故に, $bd - ac = m \times$ (整数) となるので, $bd - ac$ は m で割り切れる. つまり, $ac \equiv bd \pmod m$ が成り立つ. $\square$

[1]「素数 p に対し, $p \mid (a_1 a_2 \cdots a_r)$ ならば, $p \mid a_j$ を満たす j が存在する」という主張を使っている. より具体的には, この主張を $r = 4$, $p = 2$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = m$ として適用している.

平均点

70 名が受験し, 平均点は下の通りとなりました (小数点第 3 桁四捨五入).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	合計
平均点	9.42	18.70	17.54	11.30	5.36	6.17	5.00	73.49
配点	10	20	20	20	10	15	15	110

また, 最高点は 110 点 (1 名), 5 名の方が 100 点以上の点数をとりました.