マーラー測度とゼータ関数(survey), ゼータマーラー測度と超幾何関数

赤塚　広隆 (東京工業大学)

1　はじめに

本稿は, 九州大学における小研究集会「第2回MZVセミナー」における同タイトルの講演(2講演)の報告書である. 前者の講演「マーラー測度とゼータ関数(survey)」は, 後者の講演の前置きとして行った. そのため, 本稿の前半部はサーベイと言うほどいろいろなことを網羅しているわけでなく, むしろマーラー測度とゼータ関数/L関数の特殊値の関係についての入門的意味合いが強いことをあらかじめお断りしておく. マーラー測度の計算例を見てもらうことにより, 様々な特殊関数の特殊値が出てくることを感じ取ってもらえれば幸いである. また, Deninger[D]やRodriguez–Villegas[RV1], Lalín[L2, L3]らによるマーラー測度とレギュレータとの関係, レギュレータの計算を通したマーラー測度の研究については, 筆者の力不足のため紹介できないことをお詫び申し上げる. 後者の講演「ゼータマーラー測度と超幾何関数」は, 筆者が新たに導入したゼータマーラー測度に関する結果[A]の紹介である. 本報告書の2節〜4節が「マーラー測度とゼータ関数(survey)」, 5節〜7節が「ゼータマーラー測度と超幾何関数」の講演に対応している.

世話人の今冨耕太郎氏, 田中立志氏, 若林徳子氏には講演の機会を与えて頂いたことに深く感謝申し上げる.

2　マーラー測度

(対数的)マーラー測度は, ローラン多項式 $f(X_1,\dots,X_r)\in\mathbb{C}[X_1^{\pm1},\dots,X_r^{\pm1}]\setminus\{0\}$ に対し,

$$\begin{aligned} m(f) &= \int_0^1\cdots\int_0^1 \log|f(e^{2\pi i t_1},\dots,e^{2\pi i t_r})|dt_1\cdots dt_r \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^r}\int\cdots\int_{|z_1|=\cdots=|z_r|=1}\log|f(z_1,\dots,z_r)|\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_r}{z_r} \qquad (1)\end{aligned}$$

で定義される. マーラー測度は超越数論, トポロジー, 力学系など, さまざまな分野に現れる量である. 本稿の前半部の目的は, 次の問題を議論することである.

問題. $m(f)$ を良く知られた関数の特殊値で表せ.

3 節ではまず多項式 f が一変数の場合を考える. 4 節では多項式 f が二変数以上の場合を議論する.

3 一変数多項式に対するマーラー測度–Jensen の定理

一変数多項式に対する前節の問題に対しては一般的な解答が知られており, 次のようになる.

定理 3.1 (Jensen の定理)**.** 一変数多項式 $f(X) \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ が

$$f(X) = a\prod_{j=1}^{n}(X-\alpha_j), \quad a \in \mathbb{C}^{\times}, \alpha_j \in \mathbb{C}$$

と因数分解されたとき,

$$m(f) = \log|a| + \sum_{j=1}^{n}\log^{+}|\alpha_j|$$

となる. ただし, $\log^{+} x = \max\{\log x, 0\}$.

いろいろな証明が知られているが, (多変数多項式に対する) マーラー測度にゼータ値, ポリログ関数が現れることを示唆する証明を与える.

証明. 定義式 (1) より, $m(fg) = m(f) + m(g)$ が成り立つ. 故に, 定理を示すためには

$$m(X-\alpha) = \log^{+}|\alpha| \tag{2}$$

を任意の定数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して示せば十分である.

まず, $|\alpha| \leq 1$ のときを考える.[1] このとき,

$$\begin{aligned}
m(X-\alpha) &= \int_0^1 \log|e^{2\pi it}-\alpha|dt \\
&= \int_0^1 \log|1-\alpha e^{-2\pi it}|dt \\
&= \mathrm{Re}\int_0^1 \log(1-\alpha e^{-2\pi it})dt \\
&= -\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\int_0^1 e^{-2\pi int}dt \\
&= -\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\frac{e^{-2\pi in}-1}{-2\pi in} \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^2} - \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[1] 以下の議論で用いている $\log(1-z)$ の級数表示は $|z|=1$ では絶対収束しない. そのため, $|\alpha|=1$ のときには, 以下の議論の和と積分の交換に注意を要するが, 本稿では収束に関する議論は省略する.

ゆえに, $|\alpha| \le 1$ のとき, 式 (2) が示された.

次に $|\alpha| > 1$ のときを考える. これは次のようにして $|\alpha| < 1$ のときに帰着する:

$$\begin{aligned} m(X-\alpha) &= \int_0^1 \log|e^{2\pi it}-\alpha|dt \\ &= \int_0^1 (\log|\alpha| + \log|1-\alpha^{-1}e^{2\pi it}|)dt \\ &= \log|\alpha| + \int_0^1 \log|e^{2\pi it}-\alpha^{-1}|dt \\ &= \log|\alpha| + m(X-\alpha^{-1}) = \log|\alpha|. \end{aligned}$$

以上より, 定理 3.1 が証明された. □

注 3.2. $|\alpha| \le 1$ のときの計算で, 下から二つ目の等式でダイログ関数が出てきている. これは結局消えてしまうのであるが, 積分領域をトーラス全体 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ではなく, その部分集合に置き換えたものを計算すると, ダイログ関数が残ると予想される. 次節で見るように, 適当な二変数多項式に対するマーラー測度の計算を行うとき, トーラスの部分集合の積分に帰着し, マーラー測度の計算にダイログ関数, ゼータ値, L 値が現れる.

4 多変数多項式に対するマーラー測度

2 節の問題について, f が多変数のローラン多項式の場合, 一変数の場合のような一般的な答えは知られていない. また, 一般的な答えがあることも期待できない. そこで, 具体的な多変数多項式 $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対し問題を考えてみる. まず, 二変数多項式の最も典型的な例を紹介する.

定理 4.1 (Smyth[S])**.**

$$m(X+Y+1) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(2, \chi_{-3}).$$

ただし, χ_{-f} は導手 f の実奇指標, $L(\cdot, \chi)$ はディリクレ指標 χ に対するディリクレ L 関数を表す.

証明. Jensen の定理より,

$$\begin{aligned} m(X+Y+1) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \log|e^{2\pi it} + e^{2\pi iu} + 1|dt \right) du \\ &= \int_0^1 \log^+|e^{2\pi iu}+1|du \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log^+|e^{2\pi iu}+1|du. \end{aligned} \tag{3}$$

$u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ とする. $|e^{2\pi iu}+1| = 2|\cos(\pi u)| = 2\cos(\pi u)$ に注意すると, 次の同値関係が成り立つ:

$$|e^{2\pi iu}+1| \geq 1 \Longleftrightarrow \cos(\pi u) \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{1}{3} \leq u \leq \frac{1}{3}.$$

よって, 式 (3) の被積分関数の台は $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ であるから,

$$\begin{aligned} m(X+Y+1) &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \log|e^{2\pi iu}+1| du \\ &= \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} e^{2\pi int} dt \\ &= \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\sin(\frac{2\pi n}{3})}{\pi n}. \end{aligned}$$

あとは

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\chi_{-3}(n)$$

に注意すれば, 標準的な計算から定理が従う. □

上の証明をおさらいすると, Jensen の定理を一つの変数に対して適用することにより, 前節の注 3.2 で説明した状況, 即ちトーラスの部分集合上で積分するという状況が生まれた. その結果, $m(X+Y+1)$ はディリクレ L 値で表されることが分かった.

定理 4.1 に関連するマーラー測度の計算として, Smyth[S] 自身による

$$m(X+Y+Z+1) = \frac{7}{2\pi^2}\zeta(3)$$

がある. また, 定理 4.1 の一般化として, Cassaigne–Maillot[M, §7.3] による次の結果が知られている. 即ち, $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, 三辺の長さが $|a|$, $|b|$, $|c|$ の三角形が存在するとき, つまり, $|a|$, $|b|$, $|c|$ の任意の二つの和が残りの一つよりも大きいとき,

$$m(aX+bY+c) = \frac{1}{\pi}D\left(\left|\frac{b}{a}\right|e^{i\gamma}\right) + \frac{\alpha}{\pi}\log|a| + \frac{\beta}{\pi}\log|b| + \frac{\gamma}{\pi}\log|c| \tag{4}$$

が成り立つ. ただし, α, β, γ はそれぞれ長さ $|a|$, $|b|$, $|c|$ の辺と向かい合う角の角度で, $D(z)$ は Bloch–Wigner のダイログ関数, 即ち,

$$D(z) := \mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(z)) + \log|z|\arg(1-z) \tag{5}$$

で定義される関数である. ここで, $\mathrm{Li}_2(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は通常のダイログ関数である. 正確には, $D(z)$ はまず $|z| < 1$ で $|\arg(1-z)| < \pi/2$ として式 (5) により定義し, $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ で実解析的, $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で連続な関数として拡張した関数である. 一方, 長さが $|a|$, $|b|$, $|c|$ の三角形が存在しないときは,

$$m(aX+bY+c) = \log\max\{|a|, |b|, |c|\} \tag{6}$$

となる．Vandervelde[V] はCassaigne–Maillot による式 (4), (6) を更に拡張し, $m(aXY+bX+cY+d)$ について式 (4), (6) と類似の公式を得ている．また, 小柳 [Oy] は $m(X+Y+2\sin(\pi x))$ を x に関する微分方程式, 多重三角関数の観点から考察を行っている．

さて, マーラー測度の定義から

$$m(aX+bY+c)=m(aXY^{-1}+cY^{-1}+b)=m(aXY+cY+b)=m(aX+cY+b)$$

などが成り立ち, a,b,c について対称であることに注意すると, 式 (6) は次の命題から従うものである.[2]

命題 4.2. $F(X_1,\dots,X_r)\in\mathbb{C}[X_1^{\pm1},\dots,X_r^{\pm1}]\setminus\{0\}$ とし, $M:=\max_{|z_1|=\cdots=|z_r|=1}|F(z_1,\dots,z_r)|$ とおく．このとき, $|\alpha|>M$ を満たす任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して, 次が成り立つ:

$$m(\alpha+F(X_1,\dots,X_r))=\log|\alpha+F(0,\dots,0)|.$$

証明. マーラー測度の定義より,

$$m(\alpha+F(X_1,\dots,X_r))=\mathrm{Re}\,\frac{1}{(2\pi i)^r}\int\cdots\int_{|z_1|=\cdots=|z_r|=1}\log(\alpha+F(z_1,\dots,z_r))\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_r}{z_r}.$$

ここで, 右辺の被積分関数の対数枝は任意に取っていいことに注意する．最大値原理より, $|z_1|,\dots,|z_r|\le 1$ を満たす任意の $(z_1,\dots,z_r)$ に対し $|F(z_1,\dots,z_r)|\le M$ が成り立つ．よって, $|z_1|,\dots,|z_r|\le 1$ に対し, $|\alpha+F(z_1,\dots,z_r)|\ge|\alpha|-M>0$. ゆえに, $\log(\alpha+F(z_1,\dots,z_r))$ が $|z_1|,\dots,|z_r|\le 1$ を含む領域で正則となるように対数の枝を取ることができる．各 z_j に対し, 留数定理を適用することで命題が得られる． □

定理 4.1 のように数論的に興味深い特殊関数の特殊値が現れる場合がある一方, 命題 4.2 のように初等関数のみで書けてしまう場合もある．これまで挙げた例をもとに, この違いを考察する．上で挙げた例においては, ローラン多項式 f が

$$\{(z_1,\dots,z_r)\in\mathbb{C}^r: f(z_1,\dots,z_r)=0\}\cap\{(z_1,\dots,z_r)\in\mathbb{C}^r:|z_1|=\cdots=|z_r|=1\}\ne\emptyset \tag{7}$$

を満たすときにゼータ値や L 値が現れている．実際, ゼータ値との関係を求めるとき, 興味深い多項式の多くは式 (7) を満たしている．一方, 上の共通部分が空集合のときは命題 4.2 のように数論的な関数との関係が全く期待できない場合もあるが, 次の例のようにゼータ関数と結びつく場合があることに注意しておく．

例 4.3. [3] $c\in\mathbb{Z}_{>2}$ とし, $f(X)=X^2-cX+1$ とおく．このとき, $f(X)=0$ の根は

$$\alpha_c=\frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}(>1),\quad \beta_c=\frac{c-\sqrt{c^2-4}}{2}(\in(0,1))$$

[2] 正確には $|a|+|b|=|c|$ のようなときには命題が適用できない．このような場合は $|a|+|b|<|c|$ のときから極限を取ることで得られるが, 必要な解析は省略する．

[3] この例は, Rodoriguez–Villegas[RV1] がマーラー測度とレギュレータとの関係を説明する簡単な例として用いている．

で $\{z : f(z) = 0\} \cap \{z : |z| = 1\} = \emptyset$ に注意する．次に $m(f)$ を計算する．Jensen の定理より,

$$m(f) = \log^+ |\alpha_c| + \log^+ |\beta_c| = \log \alpha_c$$

となる．ここで, 解析的類数公式は,

$$\zeta'_{F_c}(0) = -\frac{hR}{w}$$

を主張していることに注意する．ただし, $F_c := \mathbb{Q}(\alpha_c)$, ζ_F は代数体 F のデデキントゼータ関数, h は F_c の類数, w は F_c の 1 のべき根の個数, R は F_c のレギュレータである．α_c は F_c の整数環の単数であることに注意すると,

$$\frac{m(f)}{\zeta'_{F_c}(0)} \in \mathbb{Q}^\times$$

が成り立つ．

リーマンゼータ値, ディリクレ L 値, ダイログ関数以外にもいろいろな特殊関数が現れることを見るため, さらにマーラー測度の計算例を紹介する．まず, 多重 L 値が現れる例として, Lalín[L1] による

$$\begin{aligned} & m((1+X_1)(1+X_2)(1+X_3)+(1-X_1)(1-X_2)(1-X_3)X_4) \\ = \;& \frac{7}{\pi^2}\zeta(3) + \frac{4}{\pi^3}\sum_{0\le n_1<n_2}\frac{(-1)^{n_1}}{(2n_1+1)^2 n_2^2} \\ = \;& \frac{7}{\pi^2}\zeta(3) + \frac{16}{\pi^3}(L(2,2;\chi_{-4},\chi_0) - L(2,2;\chi_{-4},\chi_{-4}^2)) \end{aligned}$$

が挙げられる．ただし, ディリクレ指標 χ_1, χ_2 に対し, $L(k_1,k_2;\chi_1,\chi_2)$ は

$$L(k_1,k_2;\chi_1,\chi_2) := \sum_{0<n_1<n_2}\frac{\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}}$$

であり, χ_0 は主指標である．

マーラー測度に曲線もしくは保型形式に付随する L 関数が現れると期待される場合もある．Deninger[D] および Boyd[B] により,

$$m(X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+1) \stackrel{?}{=} \frac{15}{4\pi^2}L(2,E)(=L'(0,E)) \tag{8}$$

が予想されている．ただし, E は $x+x^{-1}+y+y^{-1}+1=0$ の射影閉包で定義される導手 15 の楕円曲線, $L(\cdot,E)$ は E に付随する L 関数である．$L(s,E)$ は保型形式の言葉で言うと, デデキントエータ関数の積

$$g(z) := \prod_{d|15}\eta(dz), \qquad \eta(z) := e^{\frac{\pi i z}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n z})$$

に付随する保型 L 関数 $L(s,g)$ と一致する．マーラー測度と曲線に付随する L 関数の間の関係式は Boyd[B] による数値計算により広範に調べられている．また, Rodriguez–Villegas[RV1] は $x+x^{-1}+y+y^{-1}-4\sqrt{2}=0$ などの特別な曲線に対し, マーラー測度が曲線に付随する L 関数で表示できることを示した.

また, (一般) 超幾何関数が現れる場合もあり, $c>4$ に対し,

$$m(X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+c)=\log c-\frac{2}{c^2}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ 1,\ 1\\ 2,\ 2,\ 2\end{matrix};\frac{16}{c^2}\right) \tag{9}$$

が知られている (Rodriguez–Villegas[RV1]). ただし,

$${}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{p+1}\\ b_1,\dots,b_p\end{matrix};z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_{p+1})_n}{(b_1)_n\cdots(b_p)_n(1)_n}z^n \tag{10}$$

は一般超幾何関数, $(a)_0:=1$, $(a)_n:=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$ は Pochhammer 記号である．ここで, $c\geq 0$ に対し, $f(X,Y)=X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+c$ が条件式 (7) を満たすことは $0\leq c\leq 4$ と同値であることに注意する．条件式 (7) を満たしていない場合である式 (9) は比較的容易に得られるが, 条件式 (7) を満たしている場合である式 (8) は非常に難しいと思われる．ただし, $m(X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+1)$ と式 (9) の間の関係式

$$m(X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+5)=6m(X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+1) \tag{11}$$

が知られていることに注意しておく.[4] 式 (11) は Boyd[B] による数値実験により予想され, Lalín[L4] により解決された．この類のマーラー測度間に成り立つ等式は他にも Boyd により予想されている．この方面の他の研究としては Rodriguez–Villegas[RV2], 黒川–落合 [KO], Lalín–Rogers[LR] などがある.

5　マーラー測度の一般化, 特にゼータマーラー測度

前節で見たように, マーラー測度は様々な特殊関数の特殊値と結びつく．そこで, 次のような問題を考える:

問題. 次の二つの条件を満たすようにマーラー測度の一般化を定義せよ:

1. マーラー測度と同様, すべての $f\in\mathbb{C}[X_1^{\pm1},\dots,X_r^{\pm1}]\setminus\{0\}$ に対し定義される.

[4] マーラー測度一般に成り立つ変換公式が知られており, 例えば, 任意のローラン多項式 f と r 次整係数非退化行列 $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ に対し,

$$m(f(X_1^{a_{11}}\times\cdots\times X_r^{a_{1r}},\dots,X_1^{a_{r1}}\times\cdots\times X_r^{a_{rr}}))=m(f)$$

が成り立つ (証明も比較的容易). 式 (11) はこのような一般的な変換公式のみからは従わない非自明な等式である.

2. 3節および4節で述べたマーラー測度と特殊関数の関係式のいくつかを含む公式が期待できる.

曖昧さを持つ問題であるが, この問題を動機に [A] でゼータマーラー測度を新たに定義した. 若干脇道にそれるが, ゼータマーラー測度を説明する前に, これまでに考えられてきたマーラー測度の一般化および変形版をいくつか紹介する.

定義 (q–マーラー測度 [K])**.** $q > 1$ とする. このとき, $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対し, q–マーラー測度 $m_q(f)$ を

$$m_q(f) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 l_q(f(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r}))dt_1 \cdots dt_r \tag{12}$$

で定義する. ただし, $l_q(x)$ を

$$l_q(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[n]_q}(x-1)^n \qquad (|x-1| < q)$$

の有理型接続で定義する. また, $[n]_q := (q^n - 1)/(q-1)$.

$q \downarrow 1$ のとき, $[n]_q \to n$ に注意すると, 少なくとも $|x-1| < 1$ に対し $l_q(x) \to \log x (q \downarrow 1)$ が成り立つ. そのため, q–マーラー測度は上述の問題を意識したものであると考えられる. ただし, $l_q(x)$ は $x = 1 - q^m (m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ に一位の極を持つため, 多項式 f によっては式 (12) の積分が発散し, $m_q(f)$ が定義されないことに注意する.

定義 (権–小柳による一般化されたマーラー測度 [GO])**.** $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対し, $m(f_1, \ldots, f_n)$ を

$$m(f_1, \ldots, f_n) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \max_{1 \leq j \leq n} \log |f_j(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r})| dt_1 \cdots dt_r$$

で定義する.

これは上の問題を意識したものというより, 一般化されたマーラー測度とゼータ値/L 値の間の公式を数多く得ることを目指しているものと考えられる. 実際, この一般化から注 3.2 で述べた状況を生み出すことができる. 例えば, $n = 2$, $r = 1$, $f_1(X) = f(X)$, $f_2(X) = c$ ($c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は定数) とおくと,

$$m(f, c) = \int_{\substack{t \in [0,1] \\ |f(e^{2\pi i t})| \geq |c|}} \log |f(e^{2\pi i t})| dt + \log |c| \times \mathrm{meas}\{t \in [0,1] : |f(e^{2\pi i t})| < |c|\}$$

となり, $\log |f|$ を $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の部分集合上で積分する状況が得られる. そのため, ゼータ値/L 値と非常に相性のいいマーラー測度の一般化である.

定義 (高次マーラー測度 [KLO])**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ とする. このとき, k 次マーラー測度 $m_k(f)$ を

$$m_k(f) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 (\log |f(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r})|)^k dt_1 \cdots dt_r$$

で定義する.

これも高次マーラー測度と (多重) ゼータ値/L 値の間の公式を数多く得ることを目指したものと考えられる. また, 本稿の主題であるゼータマーラー測度とほぼ同時期に導入されたものである. ゼータマーラー測度と高次マーラー測度は関係の深いものであるが, それは後述する.

他にも Besser–Deninger[BD] による p 進マーラー測度などがあるが, それらは割愛する. 本題に戻り, ゼータマーラー測度の定義を与える:

定義 (ゼータマーラー測度 [A])**.** $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対し, ゼータマーラー測度 $Z(s, f)$ を

$$Z(s, f) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r})|^s dt_1 \cdots dt_r \tag{13}$$

で定義する. ただし, s は複素パラメータである.

$Z(s, f)$ について次のことが成り立ち, 問題の条件 1 を満たすことが分かる:

命題 5.1. [A, §2] 任意の $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対し, $\sigma_0(f) < 0$ が存在し, 定義式 (13) の積分は $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0(f)$ で絶対収束する. また,

$$\frac{dZ}{ds}(0, f) = m(f) \tag{14}$$

が成り立つ.

定義式 (13) を微分し, 微分と積分を交換すると式 (14) が従うことに注意する.[5] さらに $s = 0$ の高階微分についても微分と積分が交換でき, 高次マーラー測度 $m_k(f)$ と一致することが分かる:

$$\frac{d^k Z}{ds^k}(0, f) = m_k(f).$$

これを言い換えると,

$$Z(s, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k(f)}{k!} s^k \tag{15}$$

となり, ゼータマーラー測度は高次マーラー測度の母関数となっている.

ゼータマーラー測度はマーラー測度の性質をいくつか保つ. 例えば, 任意の $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ および整係数 r 次非退化行列 $(a_{ij})_{1 \le i,j \le r}$ に対し,

$$Z(s, f(X_1^{a_{11}} \times \cdots \times X_r^{a_{1r}}, \ldots, X_1^{a_{r1}} \times \cdots \times X_r^{a_{rr}})) = Z(s, f)$$

が成り立つ (脚注 4 参照). しかし, マーラー測度の典型的な性質 $m(fg) = m(f) + m(g)$ に対応するゼータマーラー測度の性質は一般には存在しないことに注意する.

[5] 微分と積分の交換であるが, $|z_1| = \cdots = |z_r| = 1$ なるすべての $(z_1, \ldots, z_r)$ に対し $f(z_1, \ldots, z_r) \neq 0$ のときは比較的容易に分かる. そうでないときは, $|f(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r})|$ が小さくなる $(t_1, \ldots, t_r)$ の集合を解析することで微分と積分が交換できることが分かる.

6　主結果

本節では, ゼータマーラー測度の計算例をいくつか紹介し, 前節の問題の条件 2 を満たすことを見る.

定理 6.1. [A, Theorems 1,2] $a \in \mathbb{C}$ とする. このとき,
(1) $|a| > 1$ のとき, $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(s, X-a) = |a|^s {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{s}{2}, & -\frac{s}{2} \\ & 1 \end{matrix} ; |a|^{-2}\right).$$

ここで, ${}_2F_1$ は式 (10) で定義される Gauss の超幾何関数である.
(2) $|a| = 1$ のとき, $\mathrm{Re}(s) > -1$ に対して

$$Z(s, X-a) = 2^s \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

(3) $|a| < 1$ のとき, $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(s, X-a) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{s}{2}, & -\frac{s}{2} \\ & 1 \end{matrix} ; |a|^{2}\right).$$

注 6.2. (a) 定理 6.1 はマーラー測度の公式 (2)(§3) を含むものである. 実際, $|z| < 1$ を固定したとき,

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{s}{2}, & -\frac{s}{2} \\ & 1 \end{matrix} ; z\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{s}{2})_n^2}{(1)_n^2} z^n \\ &= 1 + (s^2\text{次以上}) \end{aligned}$$

だから, これを定理 6.1(1), (3) に適用し, s の係数を見ることで式 (2) を復元できる. $|a| = 1$ の場合も, ガンマ関数の基本性質から容易に定理 6.1(2) から式 (2) を復元できる.
(b) 黒川–Lalín–落合 [KLO] は, 反復積分を用いる方法, 定理 6.1(2) を用いる方法それぞれから高次マーラー測度 $m_k(X-1)$ の計算を行っている. 彼らは

$$\begin{aligned} &m_2(X-1) = \frac{\pi^2}{12}, \quad m_3(X-1) = -\frac{3\zeta(3)}{2}, \\ &m_4(X-1) = \frac{19}{240}\pi^4, \quad m_5(X-1) = -\frac{15\zeta(2)\zeta(3) + 45\zeta(5)}{2} \end{aligned}$$

などを得た. また, 一般的には $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し

$$\begin{aligned} m_k(X-1) &= (-1)^k k! \sum_{h \geq 1} \frac{1}{2^{2h}} \sum_{\substack{b_1, \ldots, b_h \geq 2 \\ b_1 + \cdots + b_h = k}} \zeta(b_1, \ldots, b_h) \\ &\in \langle \zeta(b_1) \cdots \zeta(b_h) | h \geq 1, b_k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, b_1 + \cdots + b_h = k \rangle_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

が成り立つことを示した．ここで,

$$\zeta(b_1,\ldots,b_h) := \sum_{0<n_1\cdots<n_h} \frac{1}{n_1^{b_1}\cdots n_h^{b_h}}$$

は多重ゼータ値である．

定理 6.1 および多重ポリログ関数の適当な和が作る母関数に関する大野–Zagier[OZ] の結果から, $|a|\neq 1$ の場合についても $m_k(X-a)$ を多重ポリログ関数を用いて表示することが可能である．これを説明するため, まず, 大野–Zagier の結果 (の帰結) を簡単に述べる．[OZ, p.485] より, $|t|<1$ と $|\alpha|\ll 1$ に対し次が従う:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \alpha\\ 1\end{matrix};t\right) = 1+\alpha^2\sum_{\substack{n,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ n\geq s}} 2^{n-s}\left(\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{1,2\}^n\\ \#\{i:\varepsilon_i=2\}=s}} L_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,2)}(t)\right)\alpha^{n+s}. \tag{16}$$

ここで, $L_{(b_1,\ldots,b_h)}(t)$ は次の級数により定義される多重ポリログ関数である:

$$L_{(b_1,\ldots,b_h)}(t) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_h} \frac{t^{n_h}}{n_1^{b_1}\cdots n_h^{b_h}}.$$

例えば $k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $|a|<1$ のとき, 定理 6.1(3), 式 (15), 式 (16) より,

$$\begin{aligned} m_k(X-a) &= (-1)^k k! \sum_{\frac{k}{2}-1\leq n\leq k-2} \frac{1}{2^{2(k-n-1)}} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{1,2\}^n\\ \#\{i:\varepsilon_i=2\}=k-n-2}} L_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,2)}(|a|^2) \\ &\in \langle L_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,2)}(|a|^2) | n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}, \varepsilon_k\in\{1,2\}, \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n+2=k\rangle_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

を得る．

(c) $|a|\neq 1$ のとき, ゼータマーラー測度は次の関数等式が成り立つ:

$$Z(-s-2, X-a) = ||a|^2-1|^{-s-1} Z(s, X-a). \tag{17}$$

この公式は定理 6.1(1),(3) に超幾何関数の公式

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};z\right) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta\\ \gamma\end{matrix};z\right)$$

を適用することで直ちに従う．関数等式 (17) がゼータマーラー測度の中で意味を持つものなのかは現在のところ良く分かっていない．

次に, 別の一変数多項式に対するゼータマーラ測度の計算例を与える:

定理 6.3. [A, Theorem 4] $c\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．このとき,

(1) $c>2$ のとき, $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$Z(s, X^2-cX+1) = \alpha_c^s {}_2F_1\left(\begin{matrix}-s,\ -s\\ 1\end{matrix};\beta_c^2\right).$$

ここで, $\alpha_c > 1$, $\beta_c \in (0,1)$ は $X^2 - cX + 1 = 0$ の根である.
(2) $\mathrm{Re}(s) > -1/2$ に対して

$$Z(s, X^2 - 2X + 1) = 4^s \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)}.$$

(3) $0 \le c < 2$ のとき, $\mathrm{Re}(s) > -1$ に対して

$$\begin{aligned} Z(s, X^2 - cX + 1) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} \left((2-c)^{s+\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \\ s + \frac{3}{2} \end{matrix} ; \frac{2-c}{4} \right) \right. \\ & \left. + (2+c)^{s+\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \\ s + \frac{3}{2} \end{matrix} ; \frac{2+c}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

注 6.4. $c \ge 2$ のときは, 定理 6.1 と同様, Jensen の定理から従う対応するマーラー測度の公式

$$m(X^2 - cX + 1) = \log \alpha_c$$

を復元することができる. さらに, 大野–Zagier による式 (16) により, 高次マーラー測度を多重ポリログ関数を用いて表示することができる. 例えば, $c > 2$ のとき, $m_2(X^2 - cX + 1)$, $m_3(X^2 - cX + 1)$ は次のようになる:

$$\begin{aligned} m_2(X^2 - cX + 1) &= (\log \alpha_c)^2 + 2L_2(\beta_c^2), \\ m_3(X^2 - cX + 1) &= (\log \alpha_c)^3 + 6(\log \alpha_c) \times L_2(\beta_c^2) + 12L_{(1,2)}(\beta_c^2). \end{aligned}$$

$c > 2$ を整数としたとき, これらが例 4.3 のようにデデキントゼータ関数もしくは二次体 $\mathbb{Q}(\alpha_c)$ と関連を持つものであるかどうかは不明である. また, $c > 2$ のとき, $Z(s, X - a)(|a| \ne 1)$ と同様, ゼータマーラー測度は次の関数等式を持つ:

$$Z(-s-1, X^2 - cX + 1) = (c^2 - 4)^{-s-\frac{1}{2}} Z(s, X^2 - cX + 1).$$

一方, $0 \le c < 2$ のときは, 超幾何関数を級数表示したとき, 分母にパラメータ s が現れる. そのため, 対応するマーラー測度の公式

$$m(X^2 - cX + 1) = 0$$

すら復元することが困難である. (少なくとも, 筆者は定理 6.3(3) からこれを復元することができていない.)

最後に, 二変数ローラン多項式に対するゼータマーラー測度の計算例を紹介する:

定理 6.5. [A, Theorem 6], [KLO, Theorem 17] $c > 4$ のとき, $s \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ:

$$Z(s, X + X^{-1} + Y + Y^{-1} + c) = c^s {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \ -\frac{s}{2}, \ \frac{-s+1}{2} \\ 1, \ 1 \end{matrix} ; \frac{16}{c^2} \right).$$

注 6.6. これは Rodriguez–Villegas による式 (9) に対応する式であり, この結果から式 (9) を復元することができる. この結果は筆者と黒川–Lalín–落合により独立に証明が与えられた. 方法も異なり, 黒川らの方法は Rodriguez–Villegas の方法に立ち返るものである. 一方, 筆者の方法は超幾何関数のオイラー型の積分表示に帰着させるものである. 筆者による証明の概略は次節で簡単に説明する.

注 6.7. 黒川–Lalín–落合は更に, $c \geq 2$ に対し,

$$Z(s, X+Y+c) = c^s {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, & -\frac{s}{2}, & -\frac{s}{2} \\ & 1, \ 1 & \end{matrix} ; \left(\frac{2}{c}\right)^2 \right)$$

を得ている [KLO, Theorem 19].

7　主結果の証明の概略

本節では前節の定理の証明の概略を与える. ただし, ゼータマーラー測度に超幾何関数が現れることが分かる程度の説明にとどめる. 詳細は [A] を参照いただきたい.

定理 *6.1* の証明の概略. ゼータマーラー測度の定義より,

$$\begin{aligned} Z(s, X-a) &= \int_0^1 |e^{2\pi it} - a|^s dt \\ &= \int_0^1 |e^{2\pi it} - |a||^s dt \\ &= \int_0^1 \{(\cos(2\pi t) - |a|)^2 + \sin^2(2\pi t)\}^{s/2} dt \\ &= \int_0^1 (1 - 2|a|\cos(2\pi t) + |a|^2)^{s/2} dt \\ &= (1+|a|^2)^{s/2} \int_0^1 \left(1 - \frac{2|a|}{1+|a|^2}\cos(2\pi t)\right)^{s/2} dt. \end{aligned}$$

$|a| = 1$ のときは, 三角関数の倍角の公式 $\cos(2\pi t) = 1 - 2\sin^2(\pi t)$ に注意すると,

$$\begin{aligned} Z(s, X-a) &= 2^{s/2} \int_0^1 (1 - \cos(2\pi t))^{s/2} dt = 2^{s/2} \int_0^1 (2\sin^2(\pi t))^{s/2} dt \\ &= 2^{s+1} \int_0^{1/2} (\sin(\pi t))^s dt \end{aligned}$$

となる. あとは $u = \sin^2(\pi t)$ と変数変換すると, $Z(s, X-a)$ はベータ関数で表されることが分かり, 定理 6.1(2) が証明される. 次に $|a| \neq 1$ のときを考える. $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(1)_n} z^n$$

だから,

$$Z(s,X-a)=(1+|a|^2)^{s/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{s}{2})_n}{(1)_n}\left(\frac{2|a|}{1+|a|^2}\right)^n\int_0^1\cos^n(2\pi t)dt.$$

ここで,

$$\int_0^1\cos^n(2\pi t)dt=\begin{cases}0 & n=2k+1\text{ のとき}\\ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=\frac{(1/2)_k}{(1)_k} & n=2k\text{ のとき}\end{cases}$$

だから,

$$Z(s,X-a)=(1+|a|^2)^{s/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{s}{2})_{2k}(\frac{1}{2})_k}{(1)_{2k}(1)_k}\left(\frac{2|a|}{1+|a|^2}\right)^{2k}$$

となる. ここで, 簡単な計算より $(\alpha)_{2k}=2^{2k}(\frac{\alpha}{2})_k(\frac{\alpha+1}{2})_k$ が分かる. よって,

$$\begin{aligned}Z(s,X-a) &= (1+|a|^2)^{s/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{s}{4})_k(-\frac{s}{4}+\frac{1}{2})_k}{(1)_k^2}\left(\frac{2|a|}{1+|a|^2}\right)^{2k}\\ &= (1+|a|^2)^{s/2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{s}{4}, & -\frac{s}{4}+\frac{1}{2}\\ & 1\end{matrix};\left(\frac{2|a|}{1+|a|^2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. あとは超幾何関数の公式から定理 6.1(1), (3) が従う. □

次に, 定理 6.3, 定理 6.5 の証明を行う. まず, 定理 6.3 に関して,

$$Z(s,X^2-cX+1)=Z(s,X^{-1}(X^2-cX+1))=Z(s,X+X^{-1}-c)$$

に注意する. さて, 一般に次が成り立つ:

補題 7.1. $P\in\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_r]\setminus\{0\}$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&Z(s,P(X_1+X_1^{-1},\ldots,X_r+X_r^{-1}))\\ =\ &\frac{1}{\pi^r}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{|P(4u_1-2,\ldots,4u_r-2)|^s}{\prod_{j=1}^{r}\left(u_j^{1/2}(1-u_j)^{1/2}\right)}du_1\cdots du_r.\end{aligned}$$

証明. ゼータマーラー測度の定義および $\cos(2\pi t)=2\cos^2(\pi t)-1$ より,

$$\begin{aligned}&Z(s,P(X_1+X_1^{-1},\ldots,X_r+X_r^{-1}))\\ =\ &\int_0^1\cdots\int_0^1|P(2\cos(2\pi t_1),\ldots,2\cos(2\pi t_r))|^s dt_1\cdots dt_r\\ =\ &\int_0^1\cdots\int_0^1|P(4\cos^2(\pi t_1)-2,\ldots,4\cos^2(\pi t_r)-2)|^s dt_1\cdots dt_r\\ =\ &2^r\int_0^{1/2}\cdots\int_0^{1/2}|P(4\cos^2(\pi t_1)-2,\ldots,4\cos^2(\pi t_r)-2)|^s dt_1\cdots dt_r.\end{aligned}$$

$u_j=\cos^2(\pi t_j)$ と置換すると, $du_j=-2\pi u_j^{1/2}(1-u_j)^{1/2}dt_j$ より, 補題 7.1 が従う. □

さて, $P(X)=X-c$ の時を考えると,

$$Z(s,X+X^{-1}-c)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{|4u-2-c|^s}{u^{1/2}(1-u)^{1/2}}du$$

となる. $4u-2-c$ の符号を見ることで絶対値を外し, 超幾何関数のオイラー型積分表示

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};z\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt$$

に注意すれば, 例えば $c>2$ のとき,

$$Z(s,X+X^{-1}-c)=(c-2)^s{}_2F_1\left(\begin{matrix}-s,\ \frac{1}{2}\\ 1\end{matrix};-\frac{4}{c-2}\right)$$

が得られる. あとは超幾何関数の公式を用いることで定理 6.3 が得られる. 定理 6.5 も同様の方針で計算できる. ただし, 定理 6.5 の場合, 一変数の超幾何関数ではなく, 二変数超幾何関数の一つである Appell の第 2 種超幾何関数

$$F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y):=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n(1)_m(1)_n}x^my^n$$

のオイラー型積分表示

$$\begin{aligned}&F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y)\\ =\ &\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}\\ &\times\int_0^1\int_0^1 u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}dudv\end{aligned}$$

を経由することに注意する.[6] あとは定理 6.3 と同様, 公式をうまく用いることで, 定理 6.5 が得られる.

参考文献

[A] H. Akatsuka: Zeta Mahler measures, J. Number Theory **129** (2009) 2713–2734.

[BD] A. Besser and C. Deninger: p-adic Mahler measures, J. Reine Angew. Math. **517** (1999) 19–50.

[B] D. Boyd: Mahler's measure and special values of L-functions, Experiment. Math. **7** (1998) 37–82.

[D] C. Deninger: Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbb{Z}^n$-actions, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997) 259–281.

[6] [A] では補題 7.1 を適用した後, さらに式変形し Appell の第 3 種超幾何関数で表示している.

[GO] Y. Gon and H. Oyanagi: Generalized Mahler measures and multiple sine functions, Internat. J. Math. **15** (2004) 425–442.

[K] N. Kurokawa: A q–Mahler measure, Proc. Japan Acad. Ser. A **80** (2004) 70–73.

[KLO] N. Kurokawa, M. Lalín and H. Ochiai: Higher Mahler measures and zeta functions, Acta Arith. **135** (2008) 269–297.

[KO] N. Kurokawa and H. Ochiai: Mahler measures via the crystalization, Comment. Math. Univ. St. Pauli **54** (2005) 121–137.

[L1] M. Lalín: Some examples of Mahler measures as multiple polylogarithms, J. Number Theory **103** (2003) 85–108.

[L2] M. Lalín: An algebraic integration for Mahler measure, Duke Math. J. **138** (2007) 391–422.

[L3] M. Lalín: Mahler measures and computations with regulators, J. Number Theory **128** (2008) 1231–1271.

[L4] M. Lalín: On a conjecture by Boyd, to appear in Int. J. Number Theory.

[LR] M. Lalín and M. Rogers: Functional equations for Mahler measures of genus-one curves, Algebra Number Theory **1** (2007) 87–117.

[M] V. Maillot: Géométie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **80** (2000) vi+129pp.

[OZ] Y. Ohno and D. Zagier: Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, Indag. Math. (N.S.) **12** (2001) 483–487.

[Oy] H. Oyanagi: Differential equations for Mahler measures, J. Ramanujan Math. Soc. **18** (2003) 181–194.

[RV1] F. Rodriguez–Villegas: Modular Mahler measures. I, Topics in number theory (University Park, PA, 1997), Math. Appl. **467**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1999, 17–48.

[RV2] F. Rodriguez–Villegas: Identities between Mahler measures, Number Theory for the Millennium, III (Urbana, IL, 2000), A K Peters, Natick, MA, 2002, 223–229.

[S] C. J. Smyth: On measures of polynomials in several variables, Bull. Australian Math. Soc. **23** (1981) 49–63. Corrigendum (with G. Myerson), Bull. Australian Math. Soc. **26** (1982) 317–319.

[V] S. Vandervelde: A formula for the Mahler measure of $axy+bx+cy+d$, J. Number Theory **100** (2003) 184–202.