スマイルカーブが表すリスク認識

2012025 石井　貴大

2012458 田辺　雄樹

2013024 伊早坂　弘

平成 27 年度提出

目次

序章　はじめに

ブラック・ショールズモデルは、投資家がオプション価格を算出するためによく使われる道具である。しかしながら、ブラック・ショールズモデルにはいくつかの仮定の下で成り立っている。その中には、原資産の価格変動は対数正規分布に従う、その標準偏差（以下ボラティリティー）が特定の期間に対して変化しない、というような現実的ではない仮定が含まれている。投資家はブラック・ショールズモデルに投資家自身の市場予想を、あるいはリスク回避目的などを織り込んだ値をボラティリティーに代入している。実際のプレミアムから逆算されたボラティリティーは権利行使価格ごとに異なっている。それらをプロットすると得られるスマイルカーブは投資家のリスク認識を示しているといえる。

われわれは、日経平均 225 の 2015 年 8 月前後のデータを用いて、スマイルカーブを抽出した。また、その 3 次元版である Volatility Surface を作成した。

実際の価格変動に整合するモデルの一つに Stochastic Volatility モデルがある。これは、ボラティリティーを確率変数として扱ったモデルである。このモデルの便利なところは、ブラック・ショールズモデルでのボラティリティーが特定の期間に対して変化しない、という仮定を崩すことなくスマイルカーブを説明することである。我々は、このモデルによってスマイルカーブを再構築できた。このモデルと投資家の行動は矛盾していないと判断できた。

バリア・オプションではスマイルを考慮にいれる必要がある。スマイルが取引に与える影響については、スマイルカーブの存在を前提にしたバリア・オプションの価格付けを行った。スマイルカーブが存在しない BS 式の仮定がすべてあてはまるならば、バリア・オプションの価格は公式から導出が可能である。しかし、スマイルカーブを考慮した場合には、公式を用いてオプション価格を導出できないので、シミュレーションを行うことで、スマイルカーブを考慮にいれたヘッジオプション作成からノックアウトオプションの価格付けを行うことができた。

なお我々はインプライド・ボラティリティーの算出、スマイルカーブのプロット、一様乱数の生成を伴うシミュレーションには数理ソフトの Mathematica を用いた。

1.　オプション市場における volatility

1.1.　オプション取引とは

オプション取引とは、あらかじめ決められた条件（価格・満期日など）で原資産（証券や商品など）を売買する権利のことである。原資産を買う権利をコールオプション、原資産を売る権利をプットオプションと呼ぶ。我々の研究の原資産は日経平均株価指数である。

この取引は、例えば保険のように機能させることができる。図 1-1 は、株価の変動によって資産の満期価値(payoff)がどう動くかを示したものである。ここで、株式を 1 単位持っているとする。この株式の価値は市場の値動きの影響を受ける（図 1-1 の点線)。ここで、同時に権利行使価格が 100 円のプットオプションの買いを 1 単位購入する（黄色の実線)。これらの取引を組み合わせると、このポートフォリオの価値は 100 より小さくならない（赤色の実線）ので、資産の価値を保存することができたことになる。このような戦略を「プロテクティブ・プット」というが、このように相場変動に対して、対象株券と反対の価値を示すオプションを組み合わせることによって、保険の機能をもつことができる。

しかし、実際にはオプションには購入費用がかかる。オプションの価格のことをプレミアムと呼ぶ。

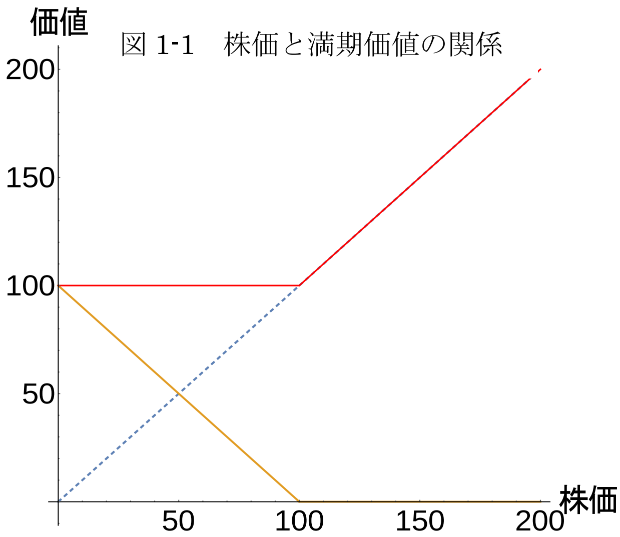


図 1-1　株価と満期価値の関係

1.2.　ブラック・ショールズモデル

一般的に、オプションのプレミアムの決定には、ブラック・ショールズモデル（以下 BS 式）が使われている。［Hull, 2014］p. 309

$$C = N(d1)S - N(d2)Ke^{-rT}$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

ただし、ln は自然対数、e は自然対数の底、C はコールオプションの価格、N(d)は標準正規分布で d 以下となる確率である。

この式に、株価 S、権利行使価格 K、Volatility(σ)、満期までの期間 T、安全利子率 r の 5 つの変数を代入すれば理論価格を導出することができる。また、BS 式は原資産価格が対数正規分布すると仮定している。

ところで、5 つの変数のなかで Volatility のみ直接観察することができない。他の 4 つの変数はいずれも所与であるため、Volatility の値をどう設定するかは、BS 式によって算出される値に大きく影響を与えることになる。

1.3　Volatility とは

Volatility とは、投資収益の変動性を測る尺度[ブックステーバー、1988]である。特にオ

プション取引では、Volatility は 2 種類存在する。Historical Volatility(以下 HV)とImplied Volatility(以下 IV)である。

1.4 Historical Volatility と Implied Volatility

HV は、過去のデータを使って volatility を推定する方法であり、過去の価格変化率の標準偏差を計算する。以下に計算方法を示す。[Hull,2014]pp.304～305 参考。

$n+1$:観測データの数、S_i: 第i区間の終わりにおける株価$(i=0,1,\dots,n)$、τ: 1 区間の長さと定義する。

このとき、 $u_i=\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), i=0,1,\dots,n$ と置く。

u_iの標準偏差の推定値 s は、 $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$ で与えられる。$\bar{u}$はu_iの平均値であり、HV の推定では 0 であると仮定される。

ここで、BS 式の仮定では、株価は対数正規分布に従っており、その株価の対数値の標準偏差は$\sigma\sqrt{T}$である。(T は、時間を表す)

よってu_iの標準偏差は$\sigma\sqrt{\tau}$となり、s は$\sigma\sqrt{\tau}$の推定値となる。

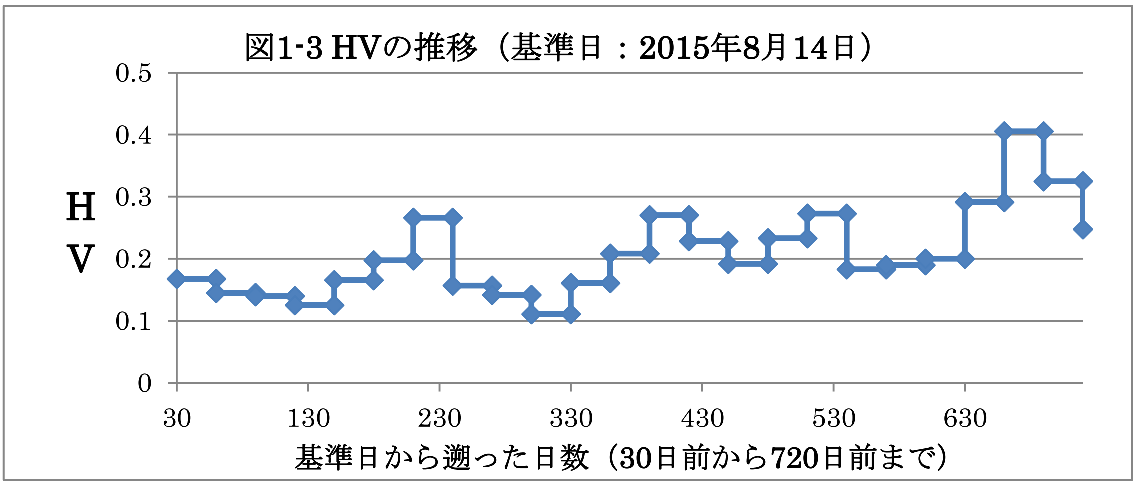
したがって、σ自体の推定値を$\hat{\sigma}$と書くと、それは $\hat{\sigma}=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$ で与えられる。

我々は、日経平均株価のデータを用いて、1 年間の取引日を 252 日と仮定（$\tau=\frac{1}{252}$）し、日次収益率の標準偏差の推定値を、年率の HV に変換して算出した。

ところで、HV の欠点は、推定期間によって値が変わってしまうことである。すなわち、上記の式の n にどんな数値を代入するか、という問題が生じるのである。

図 1-3 は、我々が算出した HV の値である。基準日を 2015 年 8 月 14 日として、その日から 720 日前まで 30 日毎に HV を計算しグラフ化した。図 1-3 からわかるように、推定期間の取り方によって HV の値が変化することが日経平均株価でも観察された。

本来、投資家が BS 式に代入している Volatility は、過去のデータに基づく HV ではなく、将来実現する原資産価格の分布の標準偏差である。そこで、既に市場でつけられたオプション価格から、BS 式を用いて、価格に織り込まれている volatility を逆算したものが IV である。IV は市場が期待している volatility であるといえる。



1.5　実際のデータを用いた分布

1984 年 1 月 4 日から 2015 年 10 月 9 日の日経平均 225、のべ 7825 件のデータの収益率の対数を取ったグラフが以下のグラフである。実線のグラフは BS 式で仮定している対数正規分布である。

グラフを見ればわかるように、実際の値動きのグラフは中央の山が明らかに高く、対数正規分布に従っているとは言えないことがわかる。また、図 1-3 を拡大したグラフが図 1-4 であるが、対数正規分布では発生確率が 0 と仮定しているところでも、実際のデータでは発生していることが確認できる。ここでも、対数正規分布に従っているとは言えなさそうである。

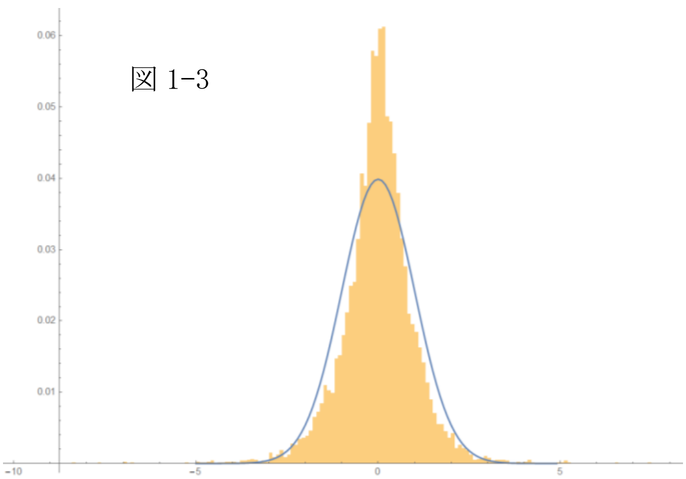


図 1-3

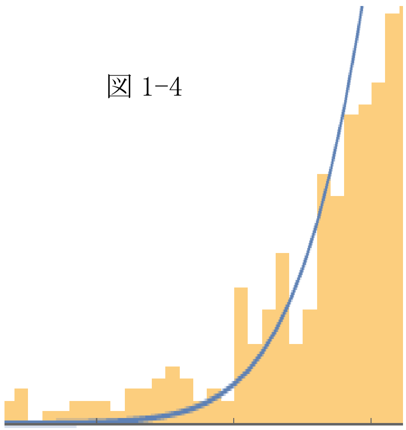


図 1-4

1.6.　日経平均 VI

前節では、IV とは「BS 式を用いて、市場で付けられたオプション価格から逆算する、市場の期待を表す volatility である」と述べた。細かい算出方法は異なるが、同じような考え方で、市場が予測する将来の volatility を計算して指数化したものが存在する。それを日経平均ボラティリティー・インデックス（以下日経平均 VI）という。

日経平均 VI は、『市場が期待する日経平均株価の将来 1 か月の変動の大きさを表す数値で』あり、『計算には当社(筆者注：日本経済新聞社)の日経 225 オプション価格が用いられ』（参考 URL 1）計算される。算出方法は、『直近二限月のオプションのうち、直近限月の先物価格を基準として OTM（アウト・オブ・ザ・マネー）となる行使価格のオプション価格をつかって、それぞれの限月の Volatility を求め、満期が 30 日になるように線形補間を行います』。(参考 URL 2)

日経平均 VI は、投資家が予想する将来の株価の変動の大きさといえるので、指数の値が大きいということは、投資家が相場の見通しに不安があると表現することができる。実際、日経平均株価が下落する期間内には、日経平均 VI は高くなっている。

図1-5：日経平均株価と日経平均VI

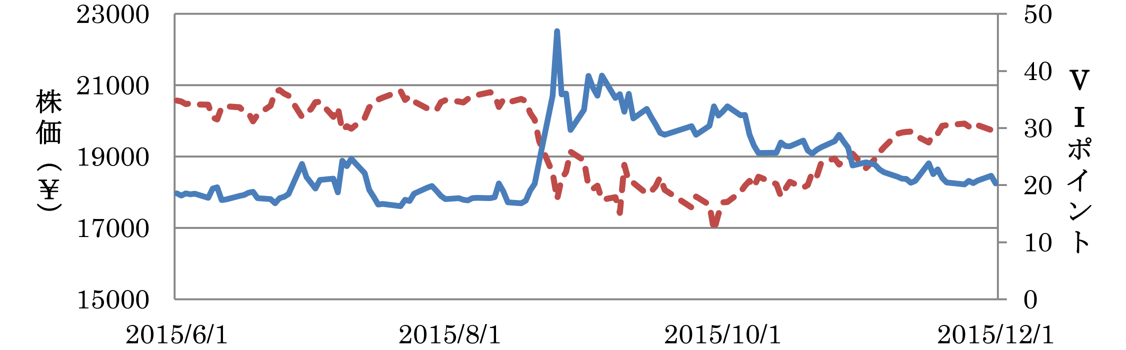


図 1-5 は、2015 年 6 月 1 日から 2015 年 12 月 1 日までの日経平均株価と日経平均 VI の推移を筆者がグラフ化したものである。日経平均株価は破線、日経平均 VI は実線であらわされている。この図から、日経平均株価と日経平均 VI は負の相関関係があることがわかる。

また、2015 年 8 月 25 日には日経平均 VI は 47.01 まで上昇した。グラフ内期間の平均値は 23.87、標準偏差は 6.49 であるから、この数値は高いことがわかる。『中国経済の想定以上の減速と 6 月中旬から続く上海総合指数の急落が、株安のきっかけになった』(週刊エコノミスト 「特集：中国ショック 株・原油暴落 2015 年 9 月 8 日号」、2015 年 12 月 11 日閲覧)（参考 URL 3）とあるように、この日は市場に大きな変化がみられた日である。

このように、市場にショックをあたえる事象により、日経平均 VI は数値が高くなるのである。

2. スマイルカーブと Volatility Surface

2.1. スマイルカーブとは

スマイルカーブとは、実際の市場でのプットオプション・コールオプションの価格を BS 式に代入し、算出される IV を、権利行使価格を横軸にしてグラフ化したときに観察される特徴である。われわれは、日経 225 オプション・2015 年 7 月 14 日・取引最終日 2015 年 9 月 10 日・満期まで 2 か月・終値は 20385.3 円（参考 URL 3）の数値を用いて導出した。

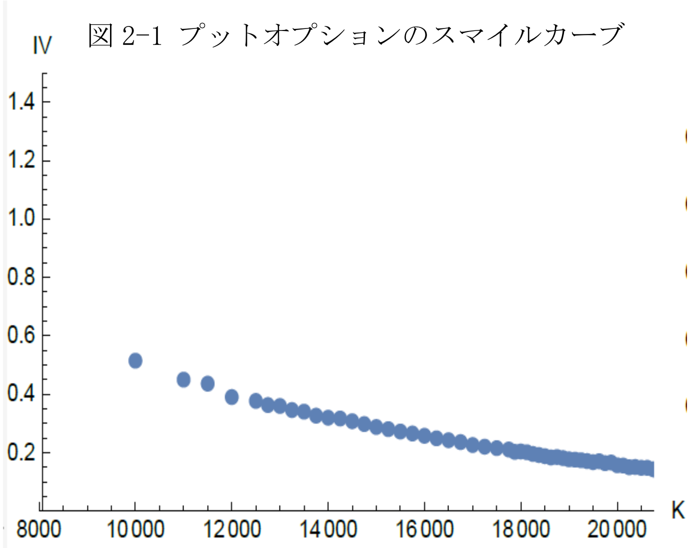


図 2-1 プットオプションのスマイルカーブ

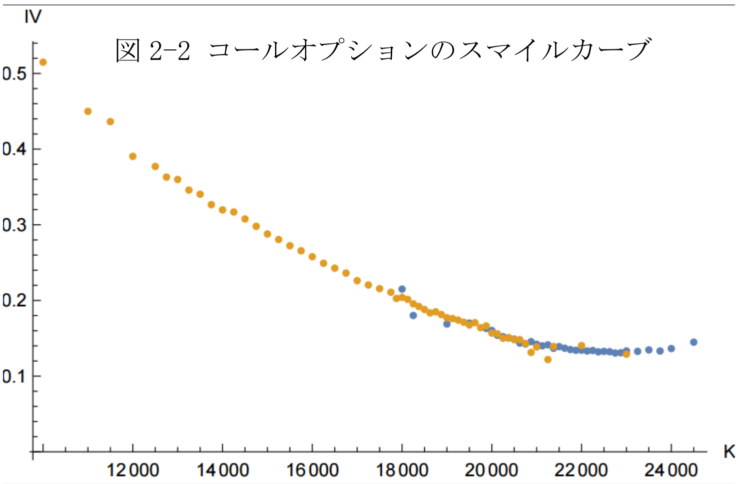


図 2-2 コールオプションのスマイルカーブ

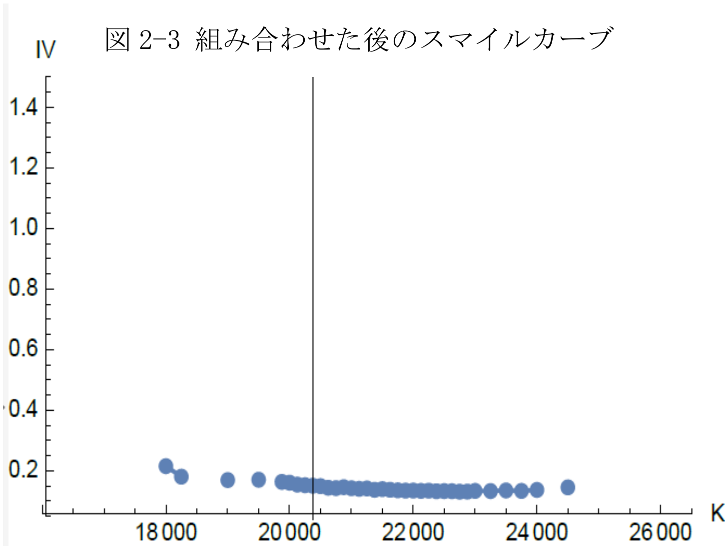


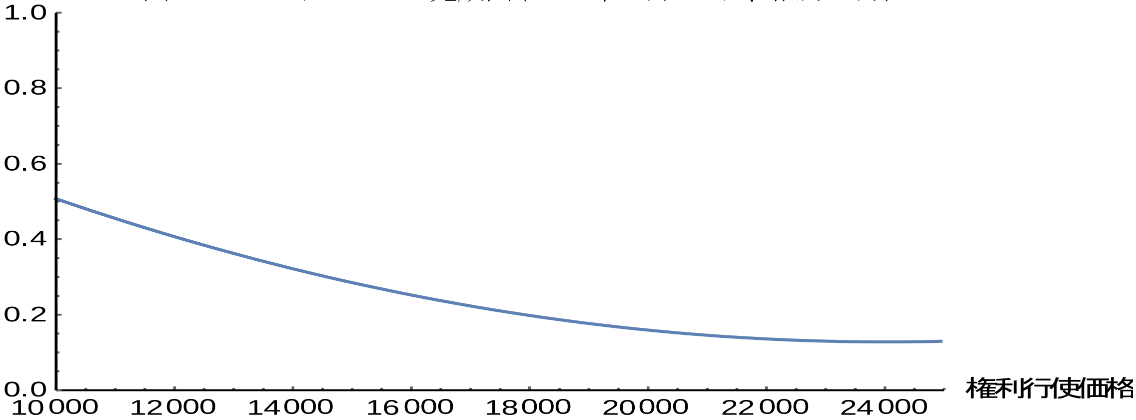
図 2-3 組み合わせた後のスマイルカーブ

上の二つの図は、実際のデータ（日経 225 オプション・2015 年 7 月 14 日・取引最終日 2015 年 9 月 10 日・満期まで 2 か月・終値は 20385.3 円）（参考 URL 4）から IV を計算し、K(権利行使価格)を横軸にしてプロットしたものである。左はプットオプション、右はコールオプションであり、これらのグラフを組み合わせると図 2-3 が出来上がる。形状を観察すると、該当日の終値付近の行使価格(20385.3)が谷になっており、そこから離れていくと Volatility は上昇する。この形状が微笑み(Smile)のようにみえることから、スマイルカーブと呼ばれる。

ここで、観察してわかることは、スマイルカーブが意味することは行使価格によって Volatility が異なることである。しかし、BS 式では Volatility は行使価格にかかわらず一定であると仮定する。ここに BS 式とスマイルカーブの矛盾が発生する。スマイルカーブが示すことは、投資家が権利行使価格ごとに異なる Volatility を BS 式に代入していることである。つまり、スマイルカーブの形状は投資家がどのようにリスクを把握しているかを表しているといえる。

2.1.1.　スマイルカーブ完成図

図 2-4 スマイルカーブ完成図(2015 年 7 月 14 日、限月 9 月)



前節の図 2-3 をスムーズな曲線に近似する（詳細な方法は後述）と、図 2-4 のスマイルカーブができあがる。観察すると、この曲線は左右対称ではなく、権利行使価格が低いほど IV が高くなる左上がりな曲線になっている。

この形状になる原因には、リスク回避型の投資家の存在が考えられる。第 1 章で述べた通り、プットオプションの購入は、株価の下落に対する保険として用いられている。投資家は資産価値の暴落を恐れるために、権利行使価格の低い、すなわちプレミアムの低いオプションであれば、多少理論値よりプレミアムが割高であるようなことがあっても、購入すると考えられる。掛け捨ての保険を購入する心理のように、支払うプレミアム低くて済むのであれば、保険を購入する動機がはたらく。そのため、IV も上昇するため、以上のようなカーブを描くと考えられる。

このような考察ができるのは、株式のオプションだからである。例えば、外国為替相場のオプションは左右対称なスマイルカーブが観察される。これは、円高でも円安でも、損得は投資家の立場によって異なるからである。

2.1.2. 図の導出における留意点

スマイルカーブを導出する上で、以下の 2 つに留意した。

① 実際のデータには、取引が成立せず空欄になっている部分があるため、前日または翌日のデータから、値が連続するように引用した。

② スムーズな曲線を描くために、最小二乗法によって最適な 2 次関数を求めた。

②について、数理ソフト mathematica の Fit コマンドを利用した。例えば、図 2-4 の近似された二次関数の式は次の式である。

$$f(k) = 10^{-9} \times 1.92605k^2 - 0.0000925666k + 1.24015$$

2.2. スマイルカーブの時系列変化

図 2-7 スマイルカーブの時系列変化（9 月限月）

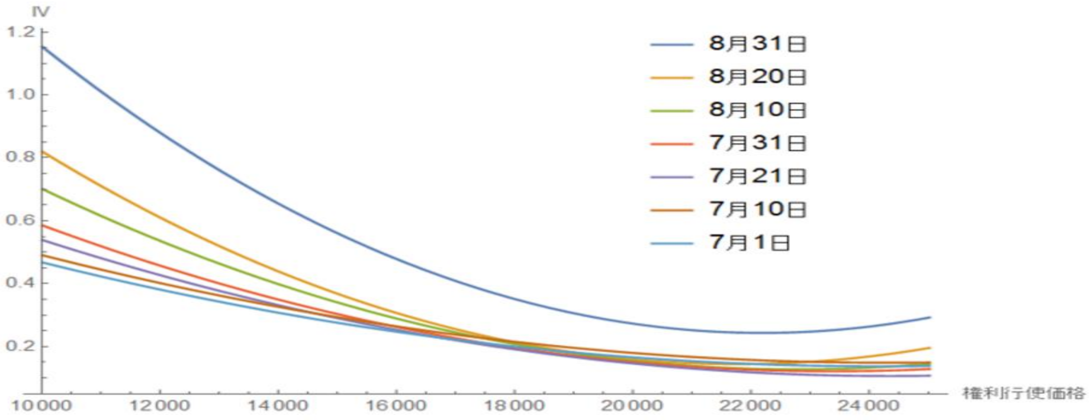


図 2-7 は、日経平均 225 オプション・取引最終日 2015 年 9 月 10 日のデータを使用し、満期に近づくにつれてスマイルカーブの形状がどう変化していくかを観察したものである。8 月 31 日のスマイルカーブは、他のスマイルカーブに比べて傾斜が強いことがわかる。これは、日経平均 VI の値のジャンプが影響していると考えられる。

2015 年 8 月 25 日の中国経済の減速（参考 URL 2）によって日経平均 VI の値は大きく上昇した。8 月 31 日でも、日経平均 VI は 33.21 であり、平均値（23.87）よりも大きい値で推移したためにスマイルカーブが上に大きくシフトしたと考えられる。

2.3. Volatility Surface とは

投資家は、オプションの価格付けの際に Volatility の期間構造を用いている。期間構造を把握するためには、スマイルカーブのグラフに時間軸を加える必要がある。このように、スマイルカーブのグラフに時間軸を加えた 3 次元のグラフを Volatility Surface と呼ぶ。ただし、x 軸には権利行使価格を終値で割って標準化した値である moneyness という単位を用いる。

2.3.1. Volatility Surface 完成図

作成した Volatility Surface を図 2-8 に示した。使用したデータは日経 225 オプション、取引日 2015 年 7 月 14 日・満期までの期間は 1 か月から 3 か月の間である。

例えば、残存期間が 1 か月(x=1)のとき、この関数は満期である 2015 年 8 月 13 日まで残り 1 か月の時点でのスマイルカーブを表している。

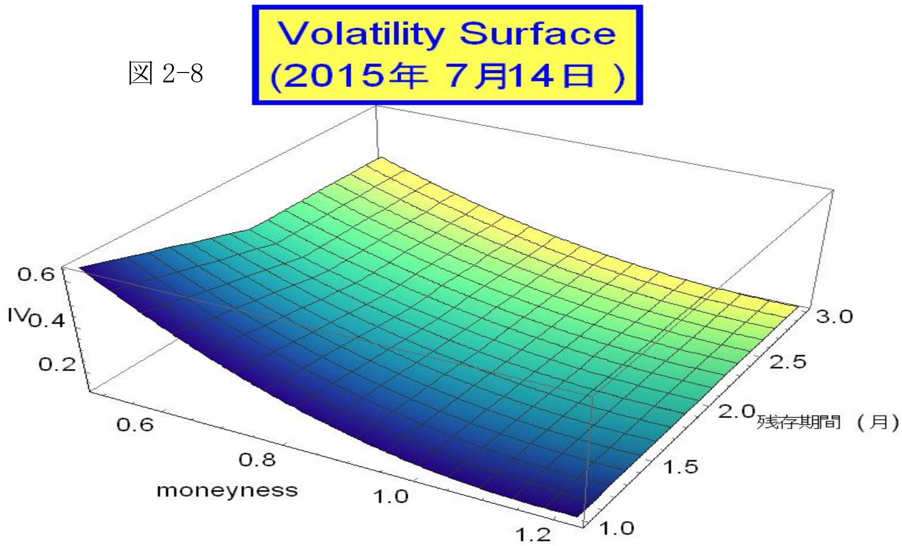
また、作成の際には、2015 年 7 月 14 日の限月 8 月のオプション・同日限月 9 月のオプション・同日限月 10 月のオプションのデータを使用し、間の範囲（例えば、残存期間 1.5 か月の部分など）については数理ソフト mathematica によって補間されている。

一般的に、『ボラティリティ・スマイルの形状はオプションの満期に依存して』おり、『オプションの満期が長くなるにつれてスマイルはあまり顕著ではなくなる』特徴がある。

[Hull、2014]pp.424～425

日経225オプションで算出した我々の研究でも、同じ特徴のVolatility Surfaceの形状を確認できた。

図2-8



3. Volatility変動モデル

BS 式は、（１）原資産の値動きは対数正規分布に従う、（２）標準偏差である volatility はある特定の期間に対して変化しない、という仮定を置いている。しかし、データから逆算された権利行使価格ごとのプレミアムを用いて得られた、IV をグラフにするとカーブを描く。これにはいくつかの要因が考えられる。

一つは原資産の値動きが従っている対数正規分布の裾が厚いということが考えられる。もう一つはvolatilityが特定の期間に対して変化しないといっても、期間の取り方によってはvolatilityが大きく飛ぶことがあり得るということである。

volatility 変動モデルの中で、以下で説明する確率的 volatility 変動モデル（以下 SV モデルと表す）では volatility を確率変数として扱っている。これにより BS 式で置いている（２）の仮定を生かしたまま算出を行うことができる。最初にSVモデルについて説明する。次にどのように計算を行ったかを実際の数値を示しながら説明する。最後にこのモデルを用いた計算の結果と得られたスマイルカーブについて述べる。

3.1　Stochastic（確率的）モデル

3.1は[Austing, 2014]p88-89を参考にした。

SVモデルは、volatilityをある確率である値を取るとしたモデルである。モデルの設定自体は単純ではあるものの、現実をよく示したものとして頻繁に用いられる。最も簡単なモデルは、確率α=1/2で二つのvolatilityσ_1もしくはσ_2を取るというものである。この時、$\sigma_1<\sigma_2$であるとする。volatilityの決定方法をこのように行うことで、BS式で仮定しているvolatilityが一定という条件を満たしたまま、スマイルカーブの存在を矛盾なく説明することができる。

プレミアムは以下の式（1）、（2）で算出されるものとする。

$$p_1 = \alpha \times p_{1,1} + (1-\alpha) \times p_{1,2} \qquad (1)$$

$$p_2 = \alpha \times p_{2,1} + (1-\alpha) \times p_{2,2} \qquad (2)$$

p_1, p_2 はそれぞれの権利行使価格 K_1, K_2 に対応しているプレミアムの観測値であり、$K_1<K_2$ とする。また、プレミアムの観測値と期待値は等しいと仮定する。プレミアムの表記については今後 $p_{K,\sigma}$ と表記する。$p_{1,1}$ なら権利行使価格 K_1 で volatility が σ_1 のプレミアムを表している。

3.1.1 計算方法

この節では実際の数値を用いて計算の過程を説明する。

(A) $p_{1,1}=0$ の仮定

まず、（1）式に注目して、実際の日経 225 のオプションのプレミアム p_1 から、$p_{1,2}$ を算出する。なお、例として使用するデータは 9 月満期 8 月 10 日のデータである。また、表 3-A は権利行使価格とプレミアムの表である。

K	K1	K2
	20 000	20 750
Premium	p1	p2
	150	375

表 3-A

この時、$p_{1,1}$ は 0 と仮定する。それは、図 3-1 において σ_1 の分布は裾野が薄いことと、行使価格 K_1 のプレミアムを計算上とりあえず 0 と置いていることが理由である。

(B) $p_{1,2}$ の算出

α=0.5、$p_{1,1}$=0 を（1）式に代入。

$$p_1 = 0.5 \times 0 + \alpha \times p_{1,2}$$
$$\therefore p_{1,2} = 300$$
となる。

(C) σ_2 の算出

そうして算出された $p_{1,2}$ から BS 式を用いて IV である σ_2 を算出する。計算を行うと 0.2166 と算出される。

(D) $p_{2,2}$ の算出

今度は、算出した σ_2 から $p_{2,2}$ を BS 式を用いて算出する。$p_{2,2}$ は 604.6 と算出される。

(E) $p_{2,1}$ の算出

$p_{2,2}$ を（2）式に代入して $p_{2,1}$ を算出する。$p_{2,1}$ は 152.6 と算出される。

$$p_2 = \alpha \times p_{2,1} + (1-\alpha) \times p_{2,2}$$
$$\therefore p_{2,1} = 152.6$$

(F)　σ$_1$の算出

さらに、$p_{2,1}$からσ$_1$が算出される。値は 0.0601 である。

(G)　$p_{1,1}$=0 の仮定を外して再計算

求めたσ$_1$を用いて B.S 式で $p_{1,1}$を計算すると 6.2 となる。

(B)　$p_{1,2}$の再計算

$p_{1,1}$を（1）式に代入して、$p_{1,2}$は 300 であった値が 293.8 に変化する。

$$p_1 = 0.5 \times 6.2 + \alpha \times p_{1,2}$$
$$\therefore p_{1,2} = 293.8$$

そこからσ$_2$を再計算…と今までの過程をすべての値が収束するまで繰り返す。

（A）から（G）まで進んだのち（B）に戻り（G）へ向かって再計算を行っている。しかし再計算を行っていくうえで値が収束すればよいが、収束しない場合は計算が終わらないために 1 日のデータあたり 30 回の繰り返し計算を限度にして再計算を行っている。再計算を行った上でのデータは表 3-B である。σ$_1$は 0.062、σ$_2$は 0.216 となった。

	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$
0810-09	6.20483	293.795	152.604	597.396
σ	σ_1		σ_2	
	0.0626506		0.216111	

表 3-B

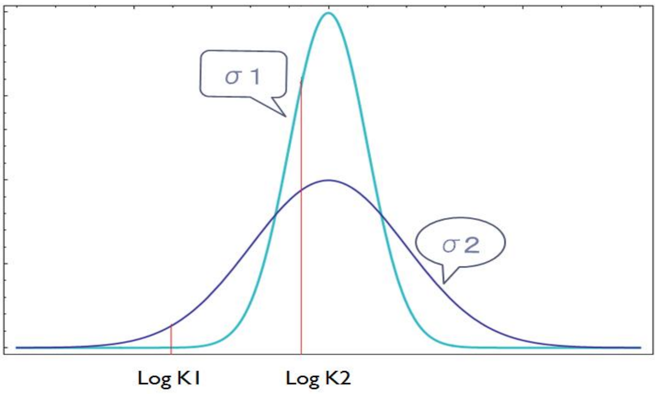


図 3-1

3.2　計算結果

まず、日経平均 225 のプレミアムの 8 月 3 日から 9 月 9 日までの期間のデータに SV モデルを用いた結果を示す。例えば、表 3-A、表 3-B は 8 月 10 日分のプットのプレミアムデータに対して、3.1.1 で説明したような計算方法により算出された結果である。

しかしながら、このモデルを使用した計算がうまくいかなかった日があった。そもそも、オプションが取引された時間と終値確定の時間とのずれは値動きがさほど大きくない場合でも存在しうる。しかし、8月25日の日経平均は前日比4.12%の下落と大きな動きを見せたため、市場はパニックになり、オプションが取引された時間と終値確定の時間とのずれが顕著に表れたと考えることができる。そのために、計算はうまくいかなかったと思われる。

また、8月25日のプレミアムはそのままではvolatilityの値がマイナスになるなど時系列データとして比較できないため、3.1.1節の計算の中で、volatilityの値が正になるまでプレミアムの価格に修正を行った。実際には、プレミアムが525円であったものを400円にしている。そして、その修正したプレミアムを使用して計算を行った。それは、先にも述べたように、オプション取引時と終値確定時の時間のずれを調整する必要があったからである。

そうして得た二つのσ（σ_1、σ_2）に対するグラフが図3-2である。このグラフは横軸を満期までの日数t、縦軸をσで取っている。また、実線のグラフがσ_1、破線のグラフがσ_2に対応している。

次にわれわれが行ったのは、このSVモデルを使用して得たvolatilityを再利用してIVを再計算し、スマイルカーブが発生するか、ということである。

具体的な手順は、以下の（１）から（３）である。

（１）　２つのvolatility（σ_1、σ_2）に対してさまざまな権利行使価格のプレミアムを算出する。

（２）　算出されたプレミアムの加重平均を用いて、各権利行使価格に対するIVの期待値を算出する。

（３）　（２）で算出したIVの期待値をプロットし、スマイルカーブが観察されるか確認する。

結果は図3-3に示してあり、グラフのKは権利行使価格を表している。グラフを見る限りスマイルカーブは観察されたと言えるだろう。ここから言えることは、SVモデルによって算出したvolatilityを市場参加者が予想として持っていれば、スマイルカーブが描かれるということである。また、BS式で仮定しているvolatilityがある期間に対して変化しないという仮定も保つことができる。

なお、グラフは2本あるが、先にも書いた通り8月25日に日経平均は大幅な下落があった。それによって、その日以降のvolatilityが大きく上昇したために8月25日の前後でvolatilityの平均を取り直している。8月25日以前の平均に対応しているのが実線のグラフ、8月25日以降の平均に対応しているのが破線のグラフである。

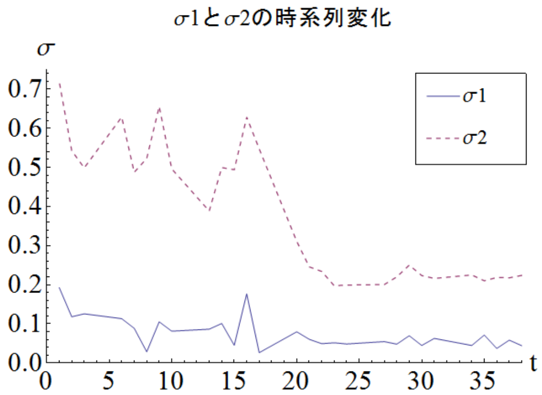


図 3-2

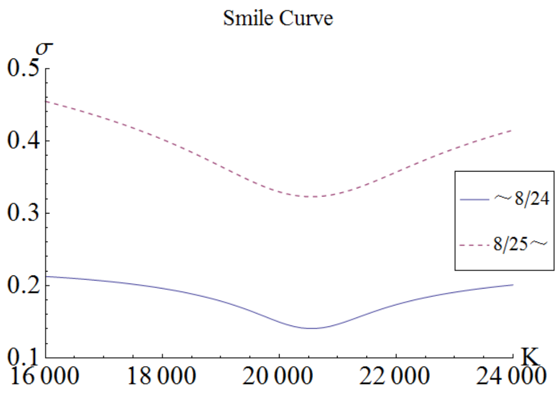


図 3-3

第 4 章　Smile が取引に与える影響

4-1 エキゾチック・オプションとは

4-1 は、[Hull, 2014]p486~p489 を参考にした。エキゾチック・オプションとは、いわば“変わり種”のオプションのことである。一般的なオプションがプレーンバニラ・オプションと呼ばれ取引所で規格化されて売買されているのに対して、エキゾチック・オプションは、店頭取引市場において相対で取引され、さまざまな形態を持つ。エキゾチック・オプションはさまざまな種類があるが、例えばバリア・オプション、デジタル・オプション、アジアン・オプション、ルシアン・オプションなどがある。デジタル・オプションは、バイナリ・オプションとも呼ばれ、ある価格に到達すれば、固定された金額を受け取れるというものである。

アジアン・オプションは、満期日の原資産価格が、満期日までの原資産の価格の算術平均として与えられるものである。ルシアン・オプションはルックバック・オプションとも呼ばれ、満期までの期間で原資産の価格の最大値・最小値が権利行使価格となる。

バリア・オプションは、原資産価格が満期日までにある価格（バリア）に到達するか否かで、オプションの権利が発生するか消滅するかが変化するオプションである。具体的なものがノックアウト・オプションとノックイン・オプションである。

ノックアウト・オプションは満期日までの期間中に原資産価格がバリアに到達するとオプションそのものが消失するという特徴を持ったオプションである。ノックイン・オプションはバリアに到達すると権利が発生するオプションである。これらのオプションは、現時点の原資産価格とバリアの位置関係、及びコール・プットで四種類に分けられる。

また、このノックアウト・オプションをヘッジしようとする際には、リスク・リバーサル戦略をとることが有効である。

リスク・リバーサル戦略とは、オプション戦略の一つで、現時点の原資産価格に対して高い権利行使価格のコールを買い、原資産価格に対して低い権利行使価格のプットを売る

という戦略である。この戦略を行うと、原資産価格がバリアより離れるとプットオプションは安くなり、よりプレーンバニラ・コールに近くなる。対して、バリアに近づくと、プットオプションの価格が高くなるため、全体としての価値はゼロに近づいていく。実際のところ、この戦略はノックアウト・オプションの複製を作ることができると考えられている。

4 - 2 バリア・オプションのヘッジング

4−2 は、[Kosowski,2015]p584~p586 を参照した。スマイルカーブの存在は、バリア・オプションのヘッジ戦略に影響をもたらす。本論文では、バリア・オプションのうち、ノックアウトバリアを持つコール・オプション（以下 KOC とする)のヘッジ戦略の収益性について検証した。

4-2-1 スマイルカーブを仮定しない場合のヘッジング

KOC は、原資産価格S_tがバリア Hを下回るとオプションの権利が消滅するという条件を持つ。スマイルカーブが存在しない BS 式を前提にした場合、時点 t での KOC のプレミアム $\mathrm{C}^{O}(t)$ の価格付けには以下の公式が用いられる。

$\mathrm{H} \leq S_t$ の場合、 $$\mathrm{C}^{O}(t) = \mathrm{C}(t) - \mathrm{J}(t) \tag{4.1}$$

ただし、 $$\mathrm{J(t)} = S_t \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}+2} N(c1) - Ke^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} N(c2) \quad ,$$

$$\mathrm{c1} = \frac{ln\left(\frac{H^2}{S_t K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad \mathrm{c2} = \frac{ln\left(\frac{H^2}{S_t K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

(4.1)式の$\mathrm{C}(t)$は、バニラ・オプションのコール（以下 vanilla call とする)の価格であり、$\mathrm{J}(t)$は差引額である。 $\mathrm{C}^{O}(t)$ の算出に $\mathrm{J}(t)$を考慮するのは、KOC には権利が消滅する可能性があるので、その価格は vanilla call よりも低くなければならないからである。図 4.1 は、vanilla call と KOC の対応関係を示したものである。

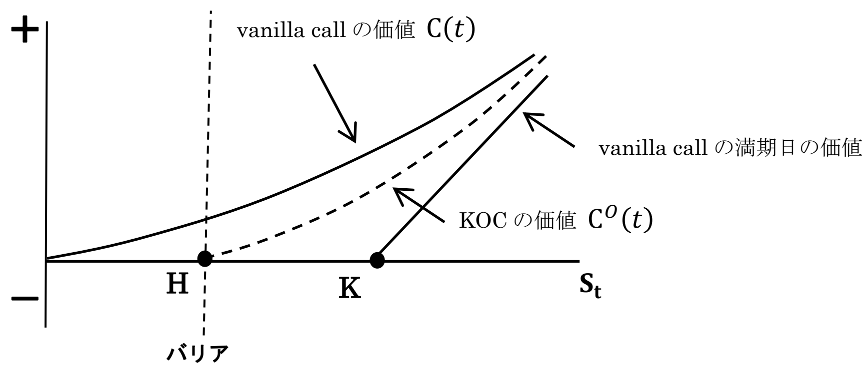


図 4.1

つぎに KOC を近似するリスク・リバーサル(以下 risk reversal とする)を構築して、ヘッジすることを考える。KOC の risk reversal は、権利行使価格 K (K > H) の vanilla call の

ロングポジション 1 単位と権利行使価格 K* の vanilla put のショートポジション x 単位から成る。ただし K* は、[Kosowski,2015]p585 で紹介されている K K* = H² という等式を満たす権利行使価格である。

vanilla call と vanilla put のプレミアムをそれぞれ c_K，p_{K^*} とすると、risk reversal の価値 Π は以下の通りになる。

$$\Pi = c_K - x p_{K^*} \qquad \text{ただし、} x = \frac{(c_K | S_t = H)}{(p_{K^*} | S_t = H)} \tag{4.2}$$

(4.2) 式は、ポジションを取り始める日に、S_t が Hの水準にある場合 $\Pi = 0$となることで KOC の価値を複製している。また、S_t が H に到達した場合に反対売買を行って risk reversal のポジションを解消することで、KOC の権利の消滅を再現できる。図 4.2 は S_t に対して risk reversal がとる価値を示したものである。

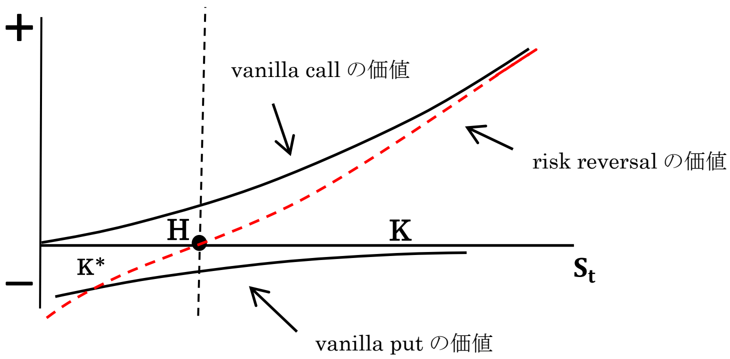


図 4.2

つまり、あるトレーダーが KOC の売りポジションを所有している場合、risk reversal の買いポジションも所有することで、二つのポジションの損益が相殺しヘッジが可能となる。ただしこれはおよその近似であって厳密には、BS モデルでは vanilla call と vanilla put のプレミアムはS_t が不変でも残存期間が短くなれば減少するので、将来 S_t が Hの水準にあるとしても $\Pi = 0$ になるとは限らない。

4－2－2 スマイルを仮定する場合のヘッジング

4-2-1 では BS 式の仮定のもとで、KOC の価格付けおよびヘッジの方法を説明した。しかし、スマイルカーブの存在および、実際の日経平均 225 の対数収益率の裾の厚い分布を考慮すると、式(4.1)を用いて KOC の価格を算出することができない。そこでわれわれは、シミュレーションを行い、スマイルカーブが存在する場合のヘッジによる収益を算出することで、KOC の価格付けを試みた。ただし、smile の形状は時間によって変化しないものとした。今回のシミュレーションでは、8 月 3 日から 9 月 10 日の期間中ランダムな日経平均

225 の価格パスを発生させ、9 月 10 日に満期日を迎える KOC が期間中にバリアにヒットした場合の risk reversal の価値を調べてみた。シミュレーションの結果、KOC がバリアにヒットした際の価値は全てゼロを下回っていた。ただし、risk reversal の価値の期待値を計算することで、損失をカバーできる KOC の価格帯を算出することができた。

4－3–1 シミュレーションの方法

シミュレーションの手順は以下の通りである。

1. 価格パスの発生

価格パスを発生させるにあたって、日経平均 225 の日次対数収益率の分布関数を推定する必要がある。しかし 1-5 で検証したように、過去の日次対数収益率は正規分布に従っていなかった。よってわれわれは、過去のデータから累積密度関数を導出し、それを日次対数収益率の分布関数とした。よって、以下の手順で価格パスを発生させた。

① 日経平均 225 の 1984 年 1 月 4 日から 2015 年 10 月 9 日までの日次対数収益率を算出する

② ①で算出された日次対数収益率の出現比率を調べ、それを出現確率とした

③ 出現確率分布を historical distribution (以下 hd とする)と呼ぶことにする、hd の累積密度関数に相当する分布関数 F(x)を導出する

④ [0,1]の範囲の一様乱数 u を生成し、F(x) = u を満たす日次対数収益率 x を求める

⑤ ④の操作を n 回行い、得られた日次対数収益率を順に$\mathrm{X}_1 \sim \mathrm{X}_n$とする。株価の対数値の差は、hd に従う確率変数となる。したがって、時点 T での日経平均 225 の円表示の終値を S_Tとした場合、時点 0 から n 日後の円表示　の終値 S_nは以下の式で求まる。

$$S_n = S_0 \cdot e^{Y_n} \quad ただし\ Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (4.3)$$

n+1 日間の一連の終値は、$\{S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n\}$となる。なお今回のシュミレーションでは、期間を 8 月 3 日から 9 月 10 日と設定しているので、S_0 を 8 月 3 日の終値 20548.1、n を 38 とした。

2. スマイルカーブの導出

期間中一定のスマイルカーブを導出するのにあたり、2015 年 8 月 3 日から 8 月 31 日までの期間中に実際に観察された 21 本のスマイルカーブを最適化したものを用いた。最適化の方法は 2.1.2 で説明したものと同じである。最適化されたスマイルカーブの二次式は以下の通りである。

$$IV(m) = 1.74238m^2 - 3.88733m + 2.33878 \quad (4.4)$$

(4.4) 式中の m は moneyness をあらわす。

3. バリアの決定

KOC のバリア H の金額は、満期日に日経平均 225 の終値がおおよそ 20%の確率で H を

下回るように定めた。

4. risk reversal の作製

4-2 で説明した risk reversal を作製した。使用するパラメーターを表 4. 1 にまとめた。

K (vanilla call の権利行使価格)	20, 500
K^* (vanilla put の権利行使価格)	18, 000
H (バリアの価格)	19, 250
x (vanilla call 1 単位に対する vanilla put の所有比率)	0. 617874
権利行使価格 K の vanilla call のプレミアム	645. 803
権利行使価格 K^* の vanilla put のプレミアム	99. 4963

K は 8 月 3 日の日経平均 225 の終値 20548.1 に最も近いものを選び、 K^* は K $K^* = H^2$ という関係をおおよそ満たすものにした。vanilla call と vanilla put のプレミアムは、式(4.4)を用いて算出した各々の IV を BS 式に代入して求めた。

risk reversal を作製する際のコストは、式(4.2)の x を利用して以下のように導出した。

$$\underbrace{645.803}_{\text{vanilla call の価格}} - 0.617874 * \underbrace{99.4963}_{\text{vanilla put の価格}} = \underbrace{584.327}_{\text{risk reversal の価格（コスト）}}$$

表 4.1

図 4.3 は 8 月 3 日時点での risk reversal の価値を表している。図から見てとれるように、終値S_t が H の場合には価値がゼロとなっている。

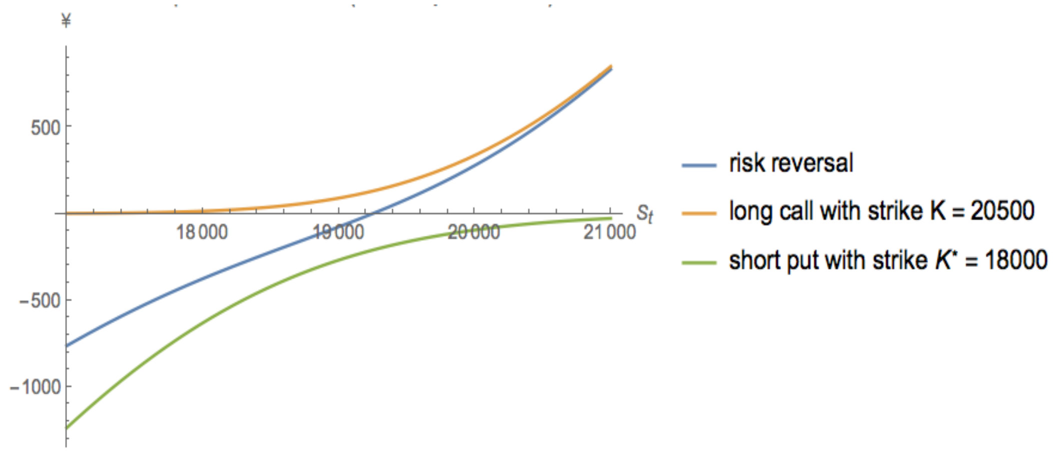
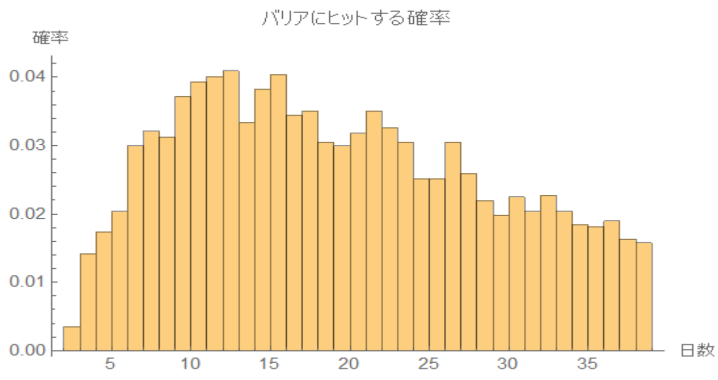


図 4.3

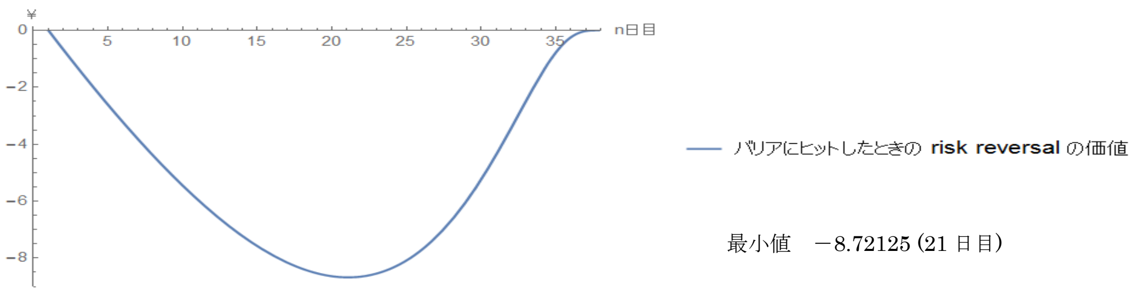
4－3－2 シミュレーションの結果

価格パスを 10,000 個発生させた場合、2~38 日目に株価が H にヒットする確率の確率分布を図 4.4、risk reversal のポジションを解消する際の価値を図 4.5 で表した。



2~38 日目のいずれかで、株価が H にヒットする確率は 0.374、株価が H にヒットせず満期日をむかえる確率は 0.626 となった。

図　4.4



最小値　−8.72125 (21 日目)

図　4.5

シミュレーションの結果、2 日目から 38 日目にかけて、終値がバリア H にヒットした場合 risk reversal のポジションを解消するために、vanilla put の買い戻しと vanilla call の転売を行うと必ず損失を被ることが分かった(図 4.5)。損失の最大値と期待値は、それぞれ−8.72125 円と−2.20407 円となった。この損失の原因は、vanilla call と vanilla put の存続期間に対するプレミアムの減少率の違いによるものである(図 4.6)。2 日目から 21 日目までの 1 単位の vanilla call の減少率が 0. 617874 単位の vanilla put の減少率を上回るために、risk reversal の価値がマイナスに転じるのである。

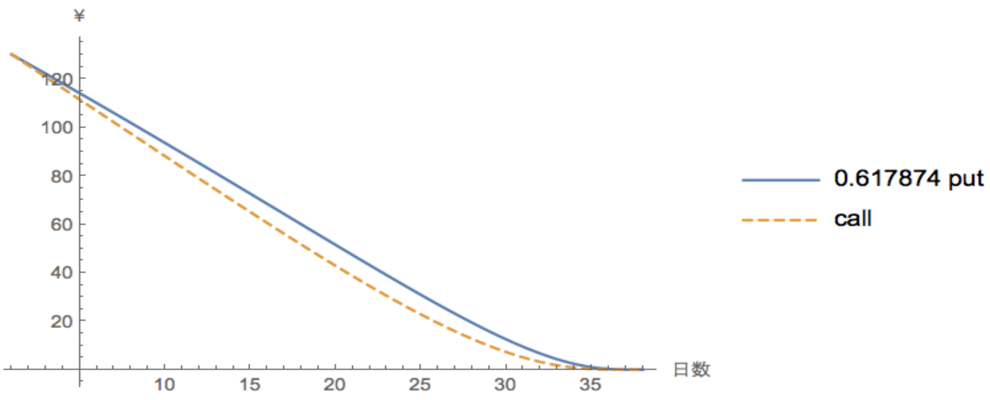


図　4.6

4－3－3 スマイルを仮定する場合の KOC の価格付け

8 月 3 日に、あるトレーダーが 9 月限月の KOC の売りポジションと risk reversal の買いポジションをとり始めるとする。ただし、KOC の売値はトレーダーが決められるとし未知数とする。KOC のプレミアムを C^O とすると、8 月 3 日時点のキャッシュ・フローは表 4.3 の通りになる。

knock-out call のプレミアム（1 単位）	＋ C^O（売り）	
vanilla put のプレミアム（0.617874 単位）	+ 61.3892 (売り)	risk reversal (買い)
vanilla call のプレミアム （1 単位）	−645.803 (買い)	−584.326

表 4.3

KOC のプレミアムは、権利が消滅する可能性がある分 vanilla call のプレミアムよりも低くなければ買い手はつかず、risk reversal よりも高くなければ売り手はつかない。よって、

584.326 （risk reversal のコスト）< C^O < 645.803 （vanilla call のプレミアム）

とならなければならない。またオプション残存期間中に日経平均 225 がバリアにヒットすることによって risk reversal は最大 −8.72125 円の損失を被る。このことを考慮するとトレーダーは、

593.047 (risk reversal のコスト ＋ 損失額の期待値) < C^O < 645.803 (vanilla call のプレミアム)

の範囲で knock-out call を売ることができるのであれば、収益を得ることができる。われわれは、このようにして KOC の価格の範囲を狭めることができた。最終的に KOC の価格はディーラーの競争によって成立すると思われる。

5 結論

スマイルカーブを抽出し時系列推移を分析することができた。ただし、これはひとつの限月のオプションの二ヶ月間の結果に過ぎない。今回は限月に近づくにつれ、カーブの傾斜が強くなっていくことが確認できたが、他の限月のオプションでもカーブの動きを調べてみる必要がある。

また、Volatility Surface も抽出できた。ただし、限月まで 1.5 か月の部分などは数理ソフト mathematica によって補間されたものになっている。時間があれば、それらの時点のスマイルカーブを導出し、より滑らかな Volatility Surface を描けていたと思われる。

確率的 Volatility モデルについては、算出した Volatility を利用してスマイルカーブを再構築することができた。このモデルは、簡単ながら投資家にとってより現実的である。

しかしながら、このモデルを使用した二者択一されるボラティリティーの値がジャンプするというシミュレーションは時間がなかったため行うことができなかった。

また、ノックアウトコールを例にしたバリアオプションの価格付けについては、スマイ

ルカーブの形状がオプションの残存期間中、不変である場合の価格を算出することができた。スマイルカーブ自体が移動し傾きも変化するモデルを含めての価格付けは今後の課題として残った。

参考文献の一覧

1. Austing,P.『Smile Pricing Explained』(Palgrave macmillan,2014)
2. Hull,J.C.『Fundamentals of Futures and Options Markets』(Pearson Education,2014)
3. Hull,J.C.『OPTIONS,FUTURES,AND OTHER DERIVATIVES』(Pearson Education,2012)
4. Kosowski,R.L. and S.N.Neftci『Principles of Financial Engineering』(Academic Press,2015)
5. リチャード・M・ブックステーバー（住友銀行キャピタルマーケット会社・英国エス・ビー・シー・エム会社共訳）『オプション価格と投資戦略』(金融財政事情研究会、1988)

参考 URL の一覧

1. 日本取引所グループ
   http://www.jpx.co.jp/derivatives/products/vi/225-vi-futures/
2. 日経平均プロフィル
   http://indexes.nikkei.co.jp/nkave/index/profile
3. 週刊エコノミスト 「特集：中国ショック 株・原油暴落 2015 年 9 月 8 日号」(2015 年 12 月 11 日閲覧)
   http://www.weekly-economist.com/2015/09/08/%E7%89%B9%E9%9B%86-%E4%B8%AD%E5%9B%BD%E3%82%B7%E3%83%A7%E3%83%83%E3%82%AF-%E6%A0%AA-%E5%8E%9F%E6%B2%B9%E6%9A%B4%E8%90%BD-2015%E5%B9%B49%E6%9C%888%E6%97%A5%E5%8F%B7/
4. 大阪取引所日報
   http://www.jpx.co.jp/markets/statistics-derivatives/daily/